Nom:............................ Prénom:............................ Classe:.................... Date: ....

Reproduire les observations de Galilée et... peser Jupiter !

Objectifs	Classe
☐ Exploiter, à l'aide d'un langage de programmation, des données astronomiques ou satellitaires pour tester les deuxième et troisième lois de Kepler.	Terminale Spé
	Durée
	2 h

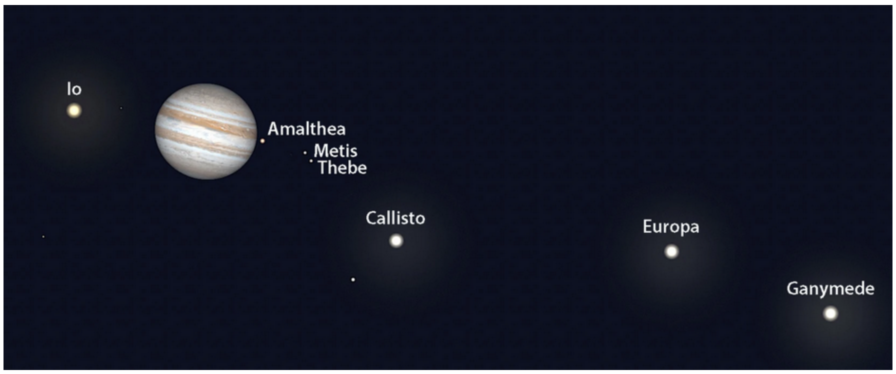


Figure 1: Les lunes dites "galiléennes" de Jupiter

Sur la paillasse

- Un ordinateur connecté à internet.

En 1609, l'invention du télescope par Galilée permet l'observation d'objets invisibles à l'œil nu. Galilée découvre que Jupiter est entouré de 4 satellites. Il les observe longuement. Le système de Jupiter était particulièrement important par sa ressemblance avec le système des planètes orbitant autour du Soleil. Son étude a aidé à comprendre les mouvements dans le système solaire. Le système de Jupiter montrait que le modèle héliocentrique du système solaire proposé par Copernic était physiquement possible. Malheureusement, l'Inquisition s'inquiéta de ses découvertes et Galilée fut forcé de se renier.

Source : `https://pariscosmo.in2p3.fr/sites/default/files/TP_Jupiter_JLRobert2.pdf`

Document 1: La troisième loi de Kepler

En 1543 Nicolaus Copernicus suppose que les planètes tournent sur des orbites circulaires autour du Soleil. Tycho Brahé observe soigneusement l'emplacement des planètes et de 777 étoiles pendant 20 ans en utilisant un sextant et un compas. Ces observations sont utilisées par Johannes Kepler, un étudiant de Tycho Brahé pour déduire de manière empirique trois lois mathématiques gouvernant l'orbite d'un objet par rapport à un autre. Pour une lune tournant autour d'une planète, la troisième loi est :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \times \pi^2}{\mathcal{G} \times M} \tag{1}$$

où

- $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation avec $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$;
- M est la masse de la planète (en kg);
- a est le demi grand axe de l'orbite elliptique (en m);
- T est la période (en s). La période est le temps nécessaire au satellite pour effectuer un tour complet autour de la planète.

Document 2: Comment déterminer les caractéristiques d'un satellite (ou lune) ?

Autour de Jupiter, les lunes suivent une orbite à peu près circulaire mais, depuis la Terre, on ne voit que la projection du mouvement dans le plan du ciel : le système est « vu de côté ».
On ne peut pas connaître la distance de la lune à Jupiter mais seulement la distance apparente, autrement dit, la distance de la lune à la droite joignant Jupiter à la Terre (ligne de visée), c'est pourquoi les distances sont exprimées en « Diamètre de Jupiter, DJ. ».
En prenant suffisamment de mesures de la position apparente de la lune au cours du temps, on peut tracer une courbe qui correspond à une sinusoïde et déterminer le rayon de l'orbite et la période de l'orbite.

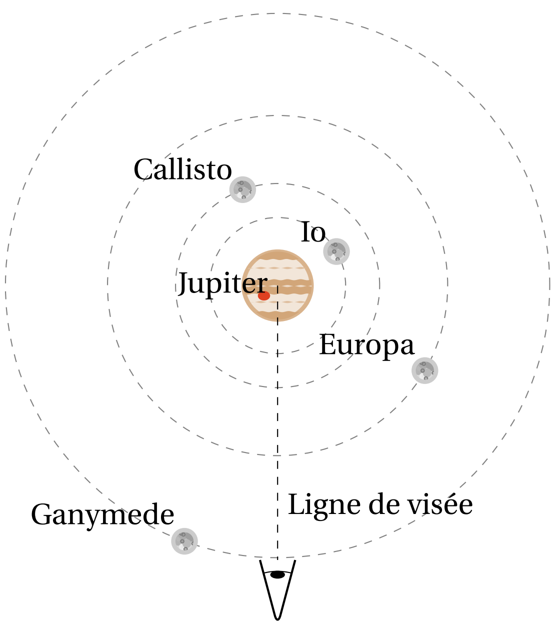


Figure 2: Orbites des lunes galiléennes autour de Jupiter

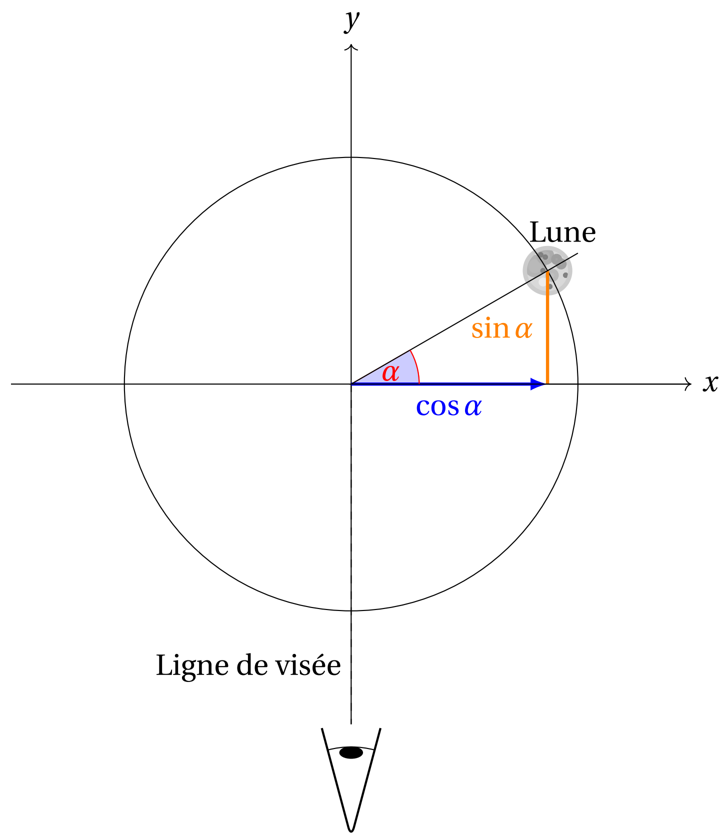


Figure 3: Définition des grandeurs du problème

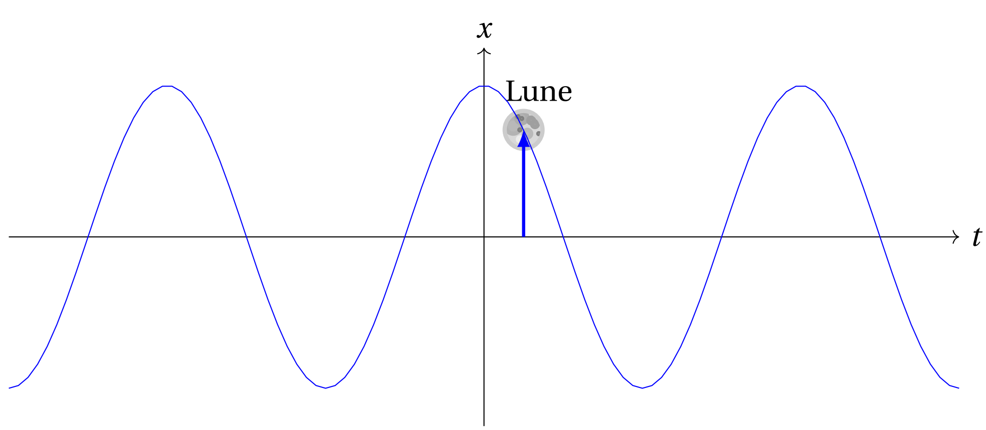


Figure 4: La distance de la lune à la ligne de visée au cours du temps est une sinusoïde

1 Observation des orbites des 4 lunes de Jupiter

1. Suivre le protocole suivant.

- ☐ Ouvrir *Stellarium*;
- ☐ Choisir l'emplacement : "Padova" dans la barre de menu verticale à gauche en activant la fenêtre de location;
- ☐ Choisir la date du 7 Janvier 1610, 19H dans la fenêtre temps à activer dans la barre de menu verticale à gauche;
- ☐ Appuyer sur pause dans la barre horizontale en bas d'écran pour arrêter le défilement du temps;
- ☐ Chercher Jupiter dans la barre de recherche à gauche et centrer l'observation sur la planète;
- ☐ Zoomer afin de voir les satellites de Jupiter (avec la roulette de la souris);
- ☐ Faire défiler le temps et observer comme Galilée autour de Jupiter entre les 13 et le 15 janvier 1610.

2 Détermination du rayon et des périodes des orbites des 4 lunes de Jupiter

2. Suivre le protocole suivant.

- ☐ Ouvrir *Regressi*.
- ☐ Charger le fichier "pointageKepler.csv" qui donne l'abscisse x des lunes galiléennes en fonction du temps, disponible en cliquant sur le qr-code ci-contre.
- ☐ Afficher le graphique "x = f(t)".
- ☐ Observer les courbes et valeurs obtenues; les valeurs des distances sont en Diamètre de Jupiter (DJ).

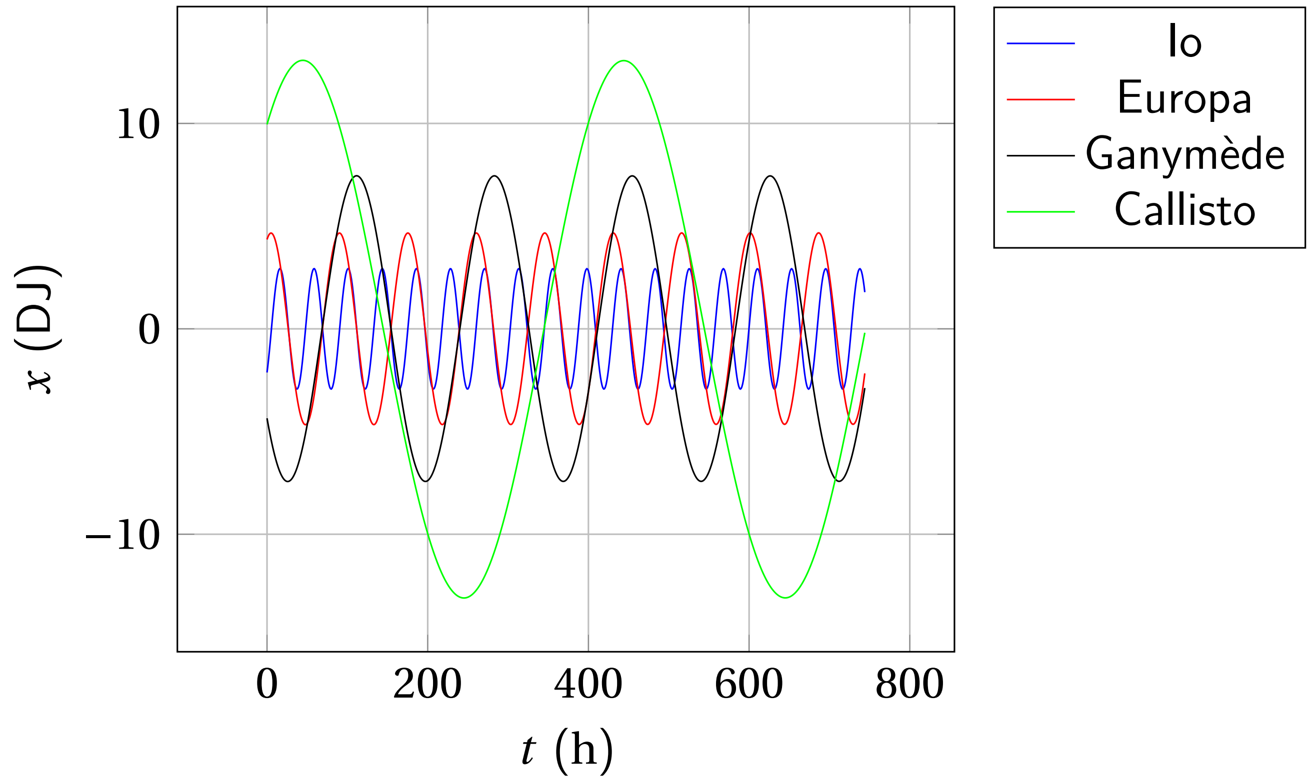
3. À partir de ces courbes, et en analysant le document 2 et l'animation précédente, expliquer comment déterminer le rayon et la période de l'orbite d'une lune de Jupiter ?

Solution: On peut déterminer, à partir de la courbe du diamètre apparent en fonction du temps des satellites, les paramètres suivants:

- Le rayon de l'orbite du satellite correspond à l'amplitude de la sinusoïde;
- La période de révolution du satellite correspond à la période de la sinusoïde.

4. Déterminer par modélisation les rayons et périodes des orbites des 4 lunes de Jupiter.

Solution: On trace tout d'abord le rayon apparent en fonction du temps pour toutes les Lunes de Jupiter:



Puis pour chacune de ces courbes, on effectue une modélisation sachant que ces courbes sont des sinusoïdes. On écrit les équations de ces sinusoïdes ci-dessous:

- Io: $x = 2{,}93 \times \sin(\frac{360 \times t}{42{,}5} - 46)$;
- Europa: $x = 4{,}66 \times \sin(\frac{360 \times t}{85{,}2} + 69)$;
- Ganymède: $x = 7{,}44 \times \sin(\frac{360 \times t}{172} - 144)$;
- Callisto: $x = 13{,}1 \times \sin(\frac{360 \times t}{400} + 50)$;

Par identification avec la fonction $x = R_0 \sin(\frac{360 \times t}{T} + \phi)$, on retrouve le rayon apparent R_0 et la période T.

5. Compléter le tableau suivant :

Satellite	**Io**	**Europe**	**Ganymède**	**Callisto**
Rayon de l'orbite a (en DJ)	2,93	4,66	7,44	13,1
Rayon de l'orbite a (en km)	409 673	651 561	1 040 261	1 831 642
Période T (en h)	42,5	85,2	172	400
Période T (en j)	1,77	3,55	7,17	16,67

Données:

- Diamètre de Jupiter: $DJ = 139\,820\,\text{km}$
- Masse de Jupiter : $M_J = 1{,}900 \times 10^{27}\,\text{km}$

3 Détermination de la masse de Jupiter

Traitement python des données

- ☐ Aller sur la plateforme *capytale* à l'aide du lien ci-contre.
- ☐ Consulter les lignes du programme.

6. Compléter les lignes 8 à 25 avec les données obtenues précédemment.

```
8  a1 = 409673
9  print ("le rayon est",a1,"en km")
10 T1 = 1.77
11 print ("la période est",T1,"en jour")
12
13 a2 = 651561
14 print ("le rayon est",a2,"en km")
15 T2 = 3.55
16 print ("le période est",T2,"en jour")
17
18 a3 = 1040261
19 print ("le rayon est",a3,"en km")
20 T3 = 7.17
21 print ("le période est",T3,"en jour")
22
23 a4 = 1831642
24 print ("le rayon est",a4,"en km")
25 T4 = 16.67
```

Listing 1: Partie du code python permettant de d'implémenter les paramètres du problème.

7. Après lecture du code, quel graphique doit-il afficher ?

Solution: D'après la ligne,

```
46 #Affichage de la droite modélisée
47 plt.plot(acube, Tcarre, "+", color = "red")
```

Listing 2: Partie du code python permettant d'afficher le graphique.

on cherche à tracer le carré de la période en fonction du cube du demi-grand axe de révolution pour les 4 satellites galiléens de Jupiter.

8. Comment, à partir de la régression linéaire, déterminer la masse de Jupiter ?

Solution: La régression linéaire nous permet de calculer la droite modélisant la fonction $T^2 = m \times a^3$. Ainsi la pente de cette droite nous permet de calculer $\frac{T^2}{a^3}$. Or, on sait aussi que $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\times\pi^2}{\mathcal{G}\times M} \iff M = \frac{4\times\pi^2}{\mathcal{G}\times\frac{T^2}{a^3}} = \frac{4\times\pi^2}{\mathcal{G}\times m}$.

9. Compléter la ligne 44 afin de calculer la masse de Jupiter.

Solution:

```python
43 #Calcul de la masse du corps attracteur, pour pi, utiliser (np.pi)
44 M = (4*(np.pi)**2)/(G*slope)
```

Listing 3: Partie du code python permettant de calculer la masse de Jupiter.

10. Exécuter le programme pour vérifier son bon fonctionnement. Noter la masse de Jupiter ci-dessous. La $3^{ème}$ loi de Kepler est-elle vérifiée dans le cas des satellites galiléens de Jupiter ?

Solution: On trouve $M_{\text{Jupiter}} = 1{,}75 \times 10^{27}\,\text{kg}$. La $3^{ème}$ loi de Kepler est vérifiée dans le cas des satellites galiléens de Jupiter puisque les points sont alignés dans le graphique ci-dessus (coefficient de corrélation $R^2 = 0.999$ très proche de 1), signifiant que T^2 est proportionnel à a^3, c'est-à-dire $\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}$.

11. Comparer la masse trouvée avec la masse théorique. Quelle peut-être l'origine de la différence entre les deux ?

Solution: $M_{\text{Jupiter}} = 1{,}75 \times 10^{27}\,\text{kg}$ et $M_{\text{Jupiter,théorique}} = 1{,}900 \times 10^{27}\,\text{km}$. On trouve donc une masse légèrement inférieure (-7,9%). Cette différence peut-être due au fait que les satellites de Jupiter ne tournent pas dans le même plan que celui qui contient l'axe Terre-Jupiter,