Nom:............................ Prénom:............................ Classe:.................... Date: ....

Un sujet de m*rde (titre provisoire)

Objectifs	Classe
☐	Terminale Spé
	Durée
	2 h

L'article[1] cité en pied de page présente l'étude du mouvement balistique des fèces (le caca) d'un manchot Adélie. C'est l'occasion de revoir quelques méthodes du programme de la spécialité Physique en terminale. La situation étudiée est la suivante : pour ne pas laisser leurs œufs sans surveillance lors de la couvaison, les manchots Adélie (vivant en Antarctique) ne quittent pas leur nid, même pour faire caca.
Ils se lèvent simplement, tournent leur derrière vers l'extérieur du nid et expulsent avec vigueur leurs excréments (parfois sur un congénère, magnifique Nature). Autour du nid se forme alors une zone plus ou moins circulaire de caca de manchot (de guano, ce sera plus court à écrire). Voir la vidéo ci-contre.

L'ordre de grandeur du rayon du cercle fécal semble être celui de la taille du manchot, à savoir quelques dizaines de centimètres. Dans l'article *Pressures produced when penguins pooh – calculations on avian defaecation*[2], les auteurs estiment ce rayon à 40 cm. Ils présentent la situation avec le schéma ci-contre.

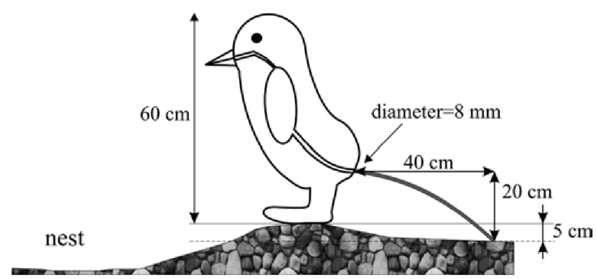

FIGURE 1 – Situation problème du jet de guano.

1. Rappeler la définition d'une chute libre.

> **Solution:** Un mouvement est dit en chute libre si l'unique force qui s'exerce sur le système est le poids.

On fait l'hypothèse que la vitesse d'éjection des excréments est parallèle au sol.

2. Dans le cadre d'une chute libre, établir les équations horaires de la trajectoire des excréments dans un repère (Oxy) tel que O coïncide avec le rectum du manchot et que (Ox) soit parallèle au sol.

1. D'après Laurent Mathieu selon une suggestion du professeur Duthoit (https://www.youtube.com/c/DamienDuthoit/featured) et l'article de Hiroyuki Tajima et Fumiya Fujisawa : Projectile Trajectory of Penguin's Faeces and Rectal Pressure Revisited (https://arxiv.org/abs/2007.00926).
2. https://www.researchgate.net/publication/225635587_Pressures_produced_when_penguins_pooh_-_Calculations_on_avian_defaecation

Solution: L'étude dynamique donne :

- Système : le guano de masse m,
- Référentiel : terrestre supposé galiléen,
- Bilan des forces extérieures :
  - le poids de l'objet $\vec{P} = m\vec{g}$.
- Conditions initiales :
  - Position initiale à $t = 0$: $M_0(x_0, y_0) = (0, 0)$,
  - Vitesse initiale à $t = 0$: $\vec{v_0} = (v_0; 0)$.

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{\text{extérieures}} &= m\vec{a}\\ \vec{P} &= m\vec{a}\\ \cancel{m}\,\vec{g} &= \cancel{m}\,\vec{a}\end{aligned}$$

donc comme $\vec{g}(0; -g)$ alors :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \quad \text{(le mouvement est uniformément accéléré selon l'axe } (Oy)) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt + v_{y_0} = -gt \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = v_0 t + x_0 = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

3. En utilisant les données du schéma de la figure 1, calculer la vitesse d'éjection des excréments.

Solution: On sait que le guano parcourt verticalement une distance $y = -25\,\text{cm}$. On a donc

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -25\,\text{cm}$$

On peut donc calculer le temps de vol du guano :

$$t = \sqrt{\frac{20{,}25\,\text{m}}{g}} = \sqrt{\frac{20{,}25\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 0{,}23\,\text{s}$$

Finalement, on sait que le rayon du vol est de $40\,\text{cm}$ donc on a

$$x = v_0 t = 40\,\text{cm}$$

donc

$$v_0 = \frac{40\,\text{cm}}{t} = \frac{0{,}40\,\text{m}}{0{,}23\,\text{s}} = 1{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Dans l'article de 2020, le modèle est légèrement modifié, comme indiqué par le schéma ci-contre.

4. Écrire les nouvelles équations horaires du mouvement, en utilisant les notations du schéma.

Solution: D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \overrightarrow{F}_{\text{extérieures}} = m\overrightarrow{a}$$
$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{a}$$
$$\cancel{m}\,\overrightarrow{g} = \cancel{m}\,\overrightarrow{a}$$

donc comme $\overrightarrow{g}(0;-g)$ alors :

$$\overrightarrow{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \quad \text{(le mouvement est uniformément accéléré selon l'axe } (Oy)\text{)} \end{cases}$$
$$\overrightarrow{v} = \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0\cos(\theta) \\ v_y = -gt + v_{0y} = -gt + v_0\sin(\theta) \end{cases}$$
$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = v_0\cos(\theta)\,t + x_0 = v_0\cos(\theta)\,t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta)\,t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta)\,t + h \end{cases}$$

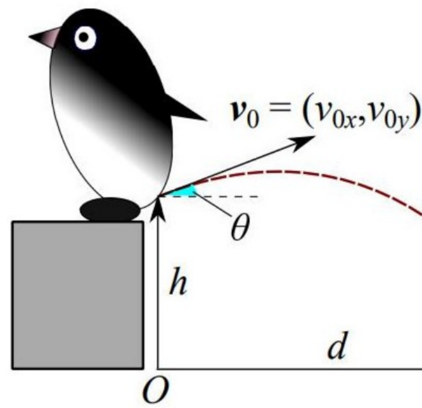

FIGURE 2 – Notations des grande l'étude du jet de guano.

On note t_V le temps de vol du guano.

5. Écrire l'équation du second degré vérifiée par t_V.

Solution: À t_V, le guano atteint l'altitude $y = 0$ donc

$$-\frac{1}{2}gt_V^2 + v_0\sin(\theta)\,t_V + h = 0$$

6. Résoudre cette équation pour obtenir l'expression littérale de t_V (utiliser l'expression du déterminant d'un polynôme du second degré et celles des racines de ce polynôme).

Solution: On résout l'équation du second degré suivante :

$$-\frac{1}{2}gt_V^2 + v_0\sin(\theta)\,t_V + h = 0$$

Cette équation a pour déterminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = v_0^2\sin^2(\theta) + 4\frac{1}{2}gh = v_0^2\sin^2(\theta) + 2gh$$

Cette valeur est positive donc l'équation admet deux racines réelles dont

$$t_v = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-v_0\sin(\theta) - \sqrt{v_0^2\sin^2(\theta)+2gh}}{-2\frac{1}{2}g} = \frac{v_0\sin(\theta)+\sqrt{v_0^2\sin^2(\theta)+2gh}}{g}$$

donc

$$t_v = \frac{v_0\sin(\theta)}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2\sin^2(\theta)}{g^2}+\frac{2h}{g}}$$

7. Vérifier alors que d est donné par

$$d = v_0\cos(\theta)\times\left(\frac{v_0\sin(\theta)}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2\sin^2(\theta)}{g^2}+\frac{2h}{g}}\right) \tag{1}$$

Solution: À $t = t_V$, le guano a parcouru horizontalement la distance $d = x(t_V) = v_0\cos(\theta)\,t_V$ donc

$$d = v_0\cos(\theta)\times\left(\frac{v_0\sin(\theta)}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2\sin^2(\theta)}{g^2}+\frac{2h}{g}}\right)$$

On cherche la valeur maximale que peut atteindre d en fonction de l'angle θ. Pour cela, on fixe h à 1,1 m (comme dans l'article, c'est la hauteur des pierres sur lesquelles les manchots font parfois caca, car il arrive qu'ils sortent du nid pour le faire. Quand même.)

La question peut être traitée de façon analytique mais on va chercher la réponse à l'aide d'un script Python, en traçant d en fonction de θ.

8. Se connecter à *Capytale* (lien sur le site du prof).
9. Compléter l'expression de d en fonction de θ (ligne 11). Recopier la ligne ici.

Solution:

```
11 d= v0*np.cos(theta)*tV # a completer
```

Listing 1 – Définition de la distance d.

10. Écrire une ligne permettant de tracer d en fonction de θ (ligne 12). Recopier la ligne ici.

Solution:

```
plt.plot(angle,d,'b') # a completer
```

Listing 2 – Implémentation du graphique.

11. En déduire l'angle pour lequel d est maximal et la valeur maximale de d.

Solution: Par lecture graphique, on a $d_{max} = 1{,}05\,\mathrm{m}$ pour $\theta = 22{,}5°$.

Prenons de la hauteur (car ça ne sent pas la rose).

Ces traces de guano laissées par les manchots sont visibles depuis l'espace (et oui) et ont permis d'identifier des colonies de manchots non répertoriées sur l'île Danger Island [3].

Les photos ont été prises par le satellite Sentinel-2A, en trajectoire elliptique autour de la Terre. La période de révolution du satellite est de $100{,}65\,\mathrm{min}$.

12. Calculer le demi-grand axe de l'ellipse sachant que la masse de la Terre est de $5{,}98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ (on donne aussi le rayon de la Terre : $6380\,\mathrm{km}$ et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$).

Solution: On peut démontrer que la constante de la troisième loi de Kepler vaut $\frac{4\pi^2}{GM_T}$. On a donc $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ donc $a^3 = T^2\frac{GM_T}{4\pi^2}$ soit

$$a = \sqrt[3]{T^2\frac{GM_T}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{(100.65 \times 60\,\mathrm{s})^2\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}} \times 5{,}98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{4\pi^2}} = 7{,}17 \times 10^6\,\mathrm{m} = 7170\,\mathrm{km}$$

L'excentricité de l'ellipse est suffisamment faible ($0{,}000\,127$) pour que la trajectoire soit considérée comme circulaire.

13. Calculer la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique.

Solution: L'étude dynamique donne :

- Système : satellite de masse m,
- Référentiel : Référentiel du centre de l'astre, référentiel supposé galiléen,
- Bilan des forces extérieures : La seule force qui s'exerce sur le satellite est la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite S :

$$\overrightarrow{F_{T/S}} = \mathcal{G} \times \frac{M_T \times m}{d^2}\overrightarrow{u_n}$$

dans le repère de Frenet. On peut également écrire $\overrightarrow{F_{T/S}} = m\overrightarrow{G}$ avec $\overrightarrow{G} = \mathcal{G} \times \frac{M_T}{d^2}\overrightarrow{u_n}$

- Appliquons la seconde loi de Newton :

$$m\overrightarrow{a}(t) = \sum \overrightarrow{F} \iff m\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{F_{A/S}} \iff \cancel{m}\,\overrightarrow{a}(t) = \cancel{m}\,\overrightarrow{G} \iff \overrightarrow{a}(t) = \mathcal{G} \times \frac{M_T}{d^2}\overrightarrow{u_n}$$

Or dans le repère de Frenet, $a_n(t) = \frac{v^2}{d}$. On a donc $a_n(t) = \frac{v^2}{d} = \mathcal{G} \times \frac{M_T}{d^2}$ d'où

$$v = \sqrt{\mathcal{G} \times \frac{M_T}{d}} = \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}} \times \frac{5{,}98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{7{,}17 \times 10^{6}\,\mathrm{m}}} = 7{,}46 \times 10^{3}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \tag{2}$$

14. Calculer également son altitude.

Solution:

15. La vitesse de Sentinel-2A est-elle plus grande ou plus petite que celle d'un satellite géostationnaire ? Justifier.

Solution: Dans le cas d'un satellite géostationnaire, la période de révolution est de 24h et l'orbite est d'environ une quarantaine de kilomètre. La vitesse est donc : $v = \frac{40 \times 10^3\,\mathrm{m}}{24 \times 60 \times 60\,\mathrm{s}} = 0{,}46\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. La vitesse de Sentinel-2A est donc beaucoup plus grande que celle d'un satellite géostationnaire.