Nom:.............................. Prénom:.............................. Classe:.................... Date: ....

Études de mouvements rectilignes et circulaires

Objectifs	Classe
☐ Coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire. ☐ Mouvement rectiligne uniformément accéléré. Mouvement circulaire uniforme. ☐ *Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie pour déterminer les coordonnées du vecteur position en fonction du temps et en déduire les coordonnées approchées ou les représentations des vecteurs vitesse et accélération.* ☐ Capacité numérique : Représenter, à l'aide d'un langage de programmation, des vecteurs accélération d'un point lors d'un mouvement. ☐ Capacité mathématique : Dériver une fonction.	Terminale Spé **Durée** 2 h

Sur la paillasse

- Un ordinateur connecté à internet et avec les logiciels *Tracker* et *Regressi*.

On se propose d'étudier le décollage d'une fusée Ariane 5 puis ensuite de son satellite Galileo mis en orbite [1].

Document 1: Ariane 5, le lanceur européen

Ariane 5 est un ancien lanceur spatial lourd de l'Agence spatiale européenne (ESA), développé pour placer des satellites sur orbite géostationnaire et des charges lourdes en orbite basse. Dans sa dernière version, il peut placer 21 tonnes en orbite basse et 10,5 tonnes sur une orbite de transfert géostationnaire. Il effectue son premier vol le 4 juin 1996 avec la mission V-88 et le lancement du 117ème et dernier exemplaire a eu lieu le 5 juillet 2023 avec la mission VA-261.

D'après *Wikipedia*

Hauteur (avec tuyères)	54,8 m
Masse au décollage	780 t
Moteur	Vulcain
Masse de la charge utile	de l'ordre de 10 t
Poussée au décollage	15 120 kN

TABLE 1 – Caractéristiques de la fusée Ariane 5

Document 2: Lien entre position, vitesse et accélération

Vecteur position

La position d'un point M à la date t est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse d'un point M à la date t est donné par $\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{k}$.

Vecteur accélération

Le vecteur accélération d'un point M à la date t est donné par $\overrightarrow{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{k}$.

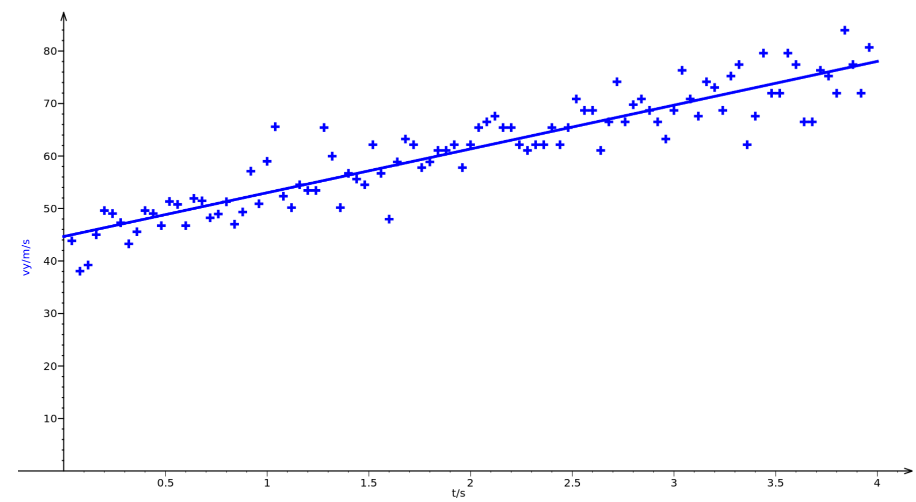
On admettra que dans le cas d'un mouvement rectiligne, les trois vecteurs position, vitesse et accélération ci-dessus ont une seule coordonnée, selon la direction du mouvement : respectivement y, v_y et a_y.

1. TP basé sur le travail de `https://gmonbac.com/`.

1 Étude du mouvement rectiligne et de la poussée de la fusée

1. Télécharger la vidéo du décollage disponible sur le lien suivant :
2. À l'aide du logiciel *Tracker*, effectuer le pointage du décollage de la fusée entre $t = 12\,\mathrm{s}$ et $t = 16\,\mathrm{s}$ du chronomètre affiché à l'écran (calibrer, puis ajouter un système d'axes, et enfin effectuer le pointage). On pourra s'aider de la fiche méthode.
3. Afficher la vitesse selon y en fonction du temps. Exporter les données du tableur dans *Regressi* (fichier, exporter, sous forme de fichier texte).
4. Quelle type de courbe a-t-on ? Ajuster une courbe de tendance adaptée. Écrire l'équation obtenue.

Solution:



La vitesse suit une loi affine d'équation $v_y = 8{,}34\,t + 44{,}7$.

5. Comment qualifier le mouvement ?

Solution: Le mouvement est rectiligne accéléré (puisque la vitesse augmente).

6. Déterminer l'accélération de la fusée pendant la phase de décollage.

Solution: L'accélération de la fusée correspond à la dérivée de la vitesse selon y par rapport au temps :

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 8{,}34\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \tag{1}$$

7. En déduire la force de poussée si on considère que les frottements sont négligeables.

Solution: D'après la deuxième loi de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
\sum \overrightarrow{F} &= m\overrightarrow{a} \\
\overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{P} &= m\overrightarrow{a} \\
F_p - mg &= ma_y \quad \text{en projetant selon y} \\
F_p &= m(a_y + g) \\
F_p &= 780 \times 10^3\,\mathrm{kg} \times (8{,}34\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} + 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) \\
F_p &= 14\,157 \times 10^3\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

La force de poussée est de $14\,157 \times 10^3\,\mathrm{N}$.

8. Vérifier l'information sur la poussée donnée dans le tableau du document 1.

Solution: La force de poussée est moindre que celle fournie dans le document 1 puisque les forces de frottement n'ont pas été pris en compte.

2 Étude du mouvement circulaire : mouvement du satellite Galileo

Document 3: Tracé des vecteurs vitesse instantanée et accélération instantanée

Vecteur vitesse instantanée

En un point M_i, le vecteur vitesse instantanée correspond au vecteur vitesse moyenne évalué sur une durée très courte autour de la position M_i. Il est donc défini par la relation :

$$\overrightarrow{v}_i = \frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \qquad (2)$$

Vecteur accélération instantanée

En un point M_i, le vecteur accélération instantanée correspond au vecteur accélération moyenne évalué sur une durée très courte autour de la position M_i. Il est donc défini par la relation :

$$\overrightarrow{a}_i = \frac{\overrightarrow{v}_{i+1} - \overrightarrow{v}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \qquad (3)$$

Document 4: Le repère de Frenet

Le repère de Frenet noté $(M, \vec{u}_n, \vec{u}_t)$ est défini par :

- une origine mobile liée au point étudié ;
- un vecteur unitaire $\vec{u}_n$ selon la direction (OM) et orienté vers O ;
- un vecteur unitaire $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

Dans ce repère, le vecteur accélération a pour expression :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n \tag{4}$$

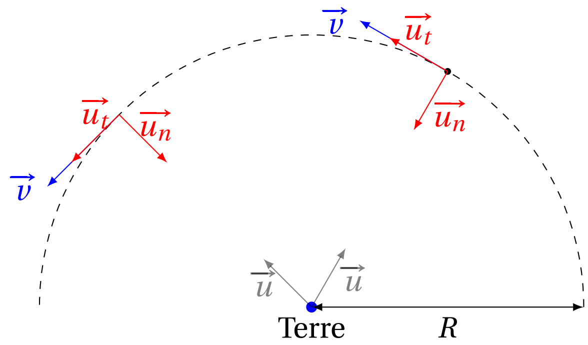


FIGURE 1 – Exemple de mouvement circulaire : mouvement d'une planète autour du Soleil

Document 5: Galileo (système de positionnement)

Galileo est un système de positionnement par satellites (radionavigation) mis en place par l'Union européenne (UE) qui est partiellement opérationnel depuis fin 2016 et doit devenir pleinement opérationnel après le lancement des derniers satellites FOC (fully operational capability) qui doit s'achever en 2024. Comme les systèmes américain GPS, russe GLONASS et chinois Beidou, Galileo permet à un utilisateur muni d'un terminal de réception d'obtenir sa position.
La période de révolution d'un satellite Galileo est de 14 h environ alors que l'altitude de ce satellite est de 23 222 km par rapport au niveau de la mer.

D'après *Wikipedia*, voir aussi l'animation suivante :animation

`https://pyspc-formation.readthedocs.io/fr/latest/etape_11/mouvement_satellite_geostationnair`
`prof_niveau_avance.html`

9. Effectuer un bilan de forces qui s'exercent sur le satellite. Donner l'expression de celle(s)-ci dans le repère de Frenet.

Solution: Seule la force d'attraction gravitationnelle s'exerce sur le satellite selon :

$$\overrightarrow{F_{T/S}} = \mathcal{G}\frac{m_T \times m_S}{R^2}\overrightarrow{u_n} \tag{5}$$

10. Appliquer la deuxième loi de Newton au système satellite. Quelle doit être la direction et le sens du vecteur accélération ?

Solution: Selon la deuxième loi de Newton appliquée au satellite, on a :

$$\begin{aligned}\sum \overrightarrow{F} &= m_S \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{a} &= \frac{\overrightarrow{F_{T/S}}}{m_S} \\ &= \mathcal{G}\frac{m_T}{d^2}\overrightarrow{u_n}\end{aligned}$$

La direction du vecteur accélération est la droite Terre-Satellite et son sens est du satellite vers la Terre (soit selon $\overrightarrow{u_n}$).

On se propose dans ce travail de vérifier que le vecteur accélération correspond bien à la réponse précédente. Pour cela, on dispose en annexe des positions du satellite durant une période de révolution, qu'on appellera dans la suite de ce travail le point M.

11. Quelle est la nature du mouvement du point M ?

Solution: La nature du mouvement du point M est circulaire uniforme.

12. Tracer les vecteurs vitesses aux position 3 et 5 puis aux positions 8 et 10. On prendra pour échelle $1\,\mathrm{cm} \longleftrightarrow 1000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Solution: On prend soin de repérer l'échelle : $9\,\mathrm{cm}$ sur le schéma représente $29\,593\,\mathrm{km}$. Les vecteurs vitesses se calculent selon :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}_3 &= \frac{\overrightarrow{M_2M_4}}{t_4 - t_2} \\ \overrightarrow{v}_5 &= \frac{\overrightarrow{M_4M_6}}{t_6 - t_4}\end{aligned}$$

soit, pour les deux points une vitesse dont la valeur est $v = \frac{23\,017\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 12\,330\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 3425\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

13. Représenter le repère de Frenet au niveau des positions étudiées.

14. Tracer les vecteurs variations de vitesse aux points 4 et 9.

Solution: On trace les vecteurs variation de vitesse en utilisant une construction graphique selon :

$$\begin{aligned}\Delta\overrightarrow{v}_4 &= \overrightarrow{v}_5 - \overrightarrow{v}_3 \\ \Delta\overrightarrow{v}_9 &= \overrightarrow{v}_{10} - \overrightarrow{v}_8\end{aligned}$$

On mesure la longueur du vecteur $\overrightarrow{v}_5 - \overrightarrow{v}_3$ et on obtient une vitesse de $3000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

15. Déterminer dans ce repère et à l'aide de l'échelle correspondante, les coordonnées a_n et a_t du vecteur accélération.

> **Solution:** L'accélération se calcule selon $a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3000\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{1\,\mathrm{h}} = \frac{3000\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{3600\,\mathrm{s}} = 0{,}42\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Dans le repère de Frenet, on a donc :
>
> $$\vec{a} = 0 \times \vec{u}_t + 0{,}42\,\vec{u}_n \tag{6}$$

16. Conclure sur la direction et sens de ces vecteurs. Dans le cas où une différence est observée entre les tracés et ce que prédit la théorie, expliquer l'origine de cet écart.

> **Solution:** La direction et le sens du vecteur $\vec{a}$ est la droite Terre-Satellite et le sens du satellite vers la Terre, comme le prédit la théorie. Si une différence est observée, elle peut être dû à la précision des tracés, ou encore le choix de calcul des vecteurs vitesse entre les points $i+1$ et $i-1$, ce qui est étudié dans la dernière question.

17. Retrouver le rayon de la trajectoire et comparer avec celle donnée dans l'énoncé.

> **Solution:** Le rayon de l'orbite peut se retrouver grâce à la valeur théorique de l'accélération normale dans le repère de Frenet :
>
> $$a_n = \frac{v^2}{R} \Longleftrightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(3425\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})^2}{0{,}42\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}} = 2{,}8 \times 10^7\,\mathrm{m} = 28\,000\,\mathrm{km} \tag{7}$$
>
> Cette valeur est proche des $29\,593\,\mathrm{km}$ recherchés.

18. On trace maintenant ces vecteurs à l'aide du programme informatique *python*. Suivre le protocole suivant :

Utilisation du script

- [ ] Aller sur la page *Bashton* contenant le script en cliquant sur le lien ci-contre.

19. Compléter la ligne 30 de façon à définir le rayon de la trajectoire. La recopier ci-dessous.

```python
29 RT = 6371 # rayon de la Terre en km
30 R = 23222+RT
```

Listing 1 – Partie du code python permettant de définir le rayon de la trajectoire

20. Compléter la ligne 55 de façon à définir le le pas de temps. La recopier ci-dessous.

```python
54 #Initialisation des constantes du problème
55 Dt = 3600        #Pas de temps en s
```

Listing 2 – Partie du code python permettant de définir le pas de temps Δt entre chaque point de la trajectoire

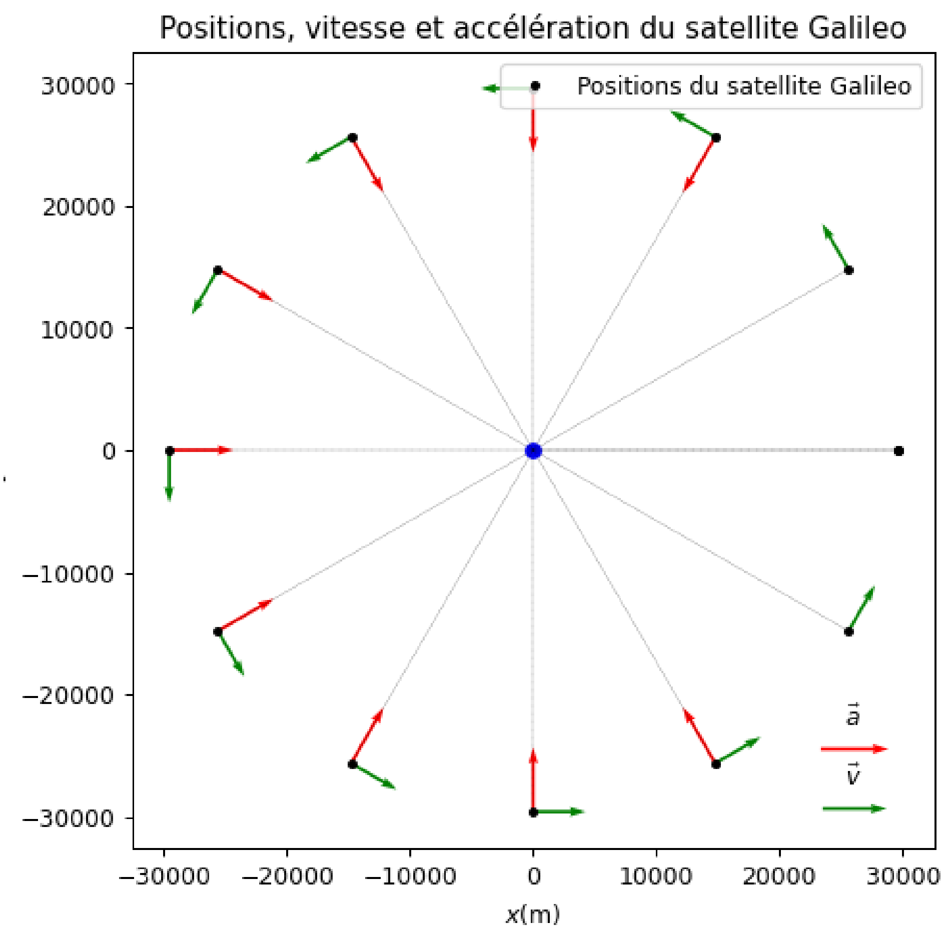
21. Compléter les lignes 64 et 65 de façon à les composantes du vecteur accélération. Les recopier ci-dessous.

```
62 #Calcul des coordonnées du vecteur accélération
63 for i in range(2,N-2):
64     ax[i] = (vx[i+1]-vx[i-1])/(2*Dt)
65     ay[i] = (vy[i+1]-vy[i-1])/(2*Dt)
```

Listing 3 – Partie du code python permettant de calculer les composantes de l'accélération

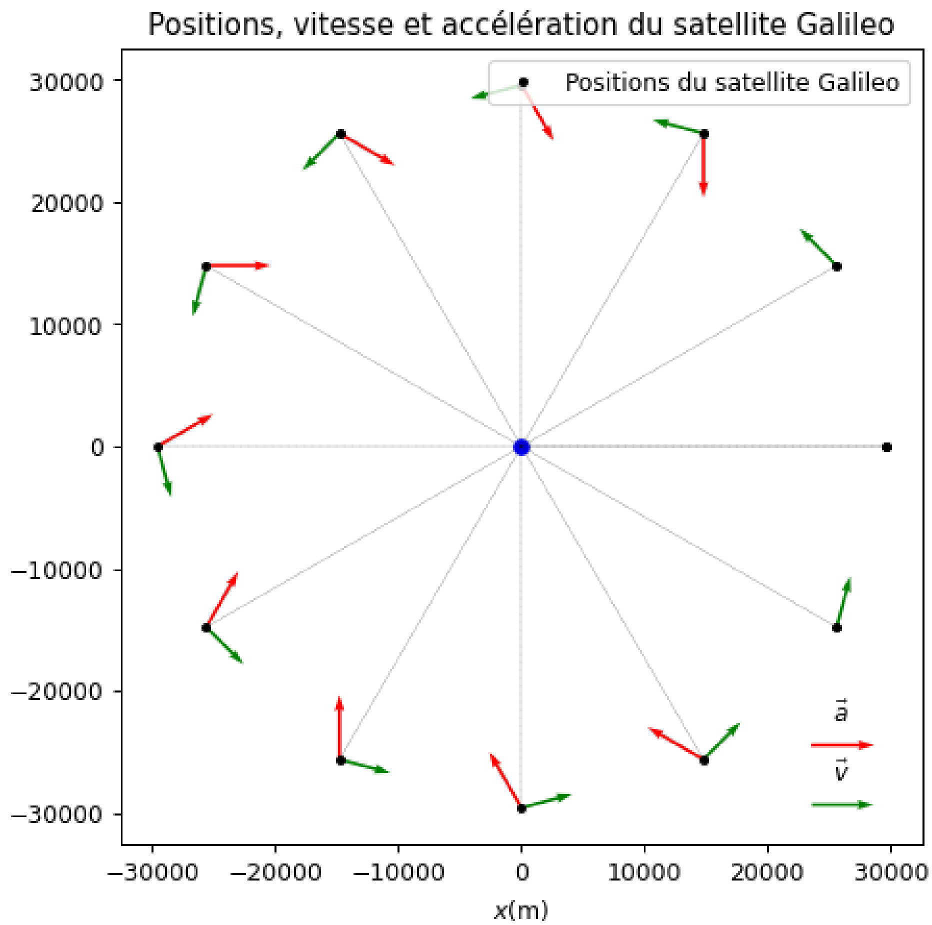
22. Vérifier vos tracés à la main à l'aide du programme informatique.

Solution: On retrouve bien les même vecteurs dans la base de Frenet, à savoir que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire alors que le vecteur accélération est normal à la trajectoire. Son sens est par ailleurs du satellite vers la Terre.



23. Bonus : en première et seconde, nous utilisions un schéma qui n'était pas centré pour les calculs de vitesse ($\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{t_{i+1}-t_i}$ et $\vec{a}_i = \frac{\vec{v}_{i+1}-\vec{v}_i}{t_{i+1}-t_i}$). Adapter le programme pour observer la différence par rapport au schéma centré utilisé dans ce travail.

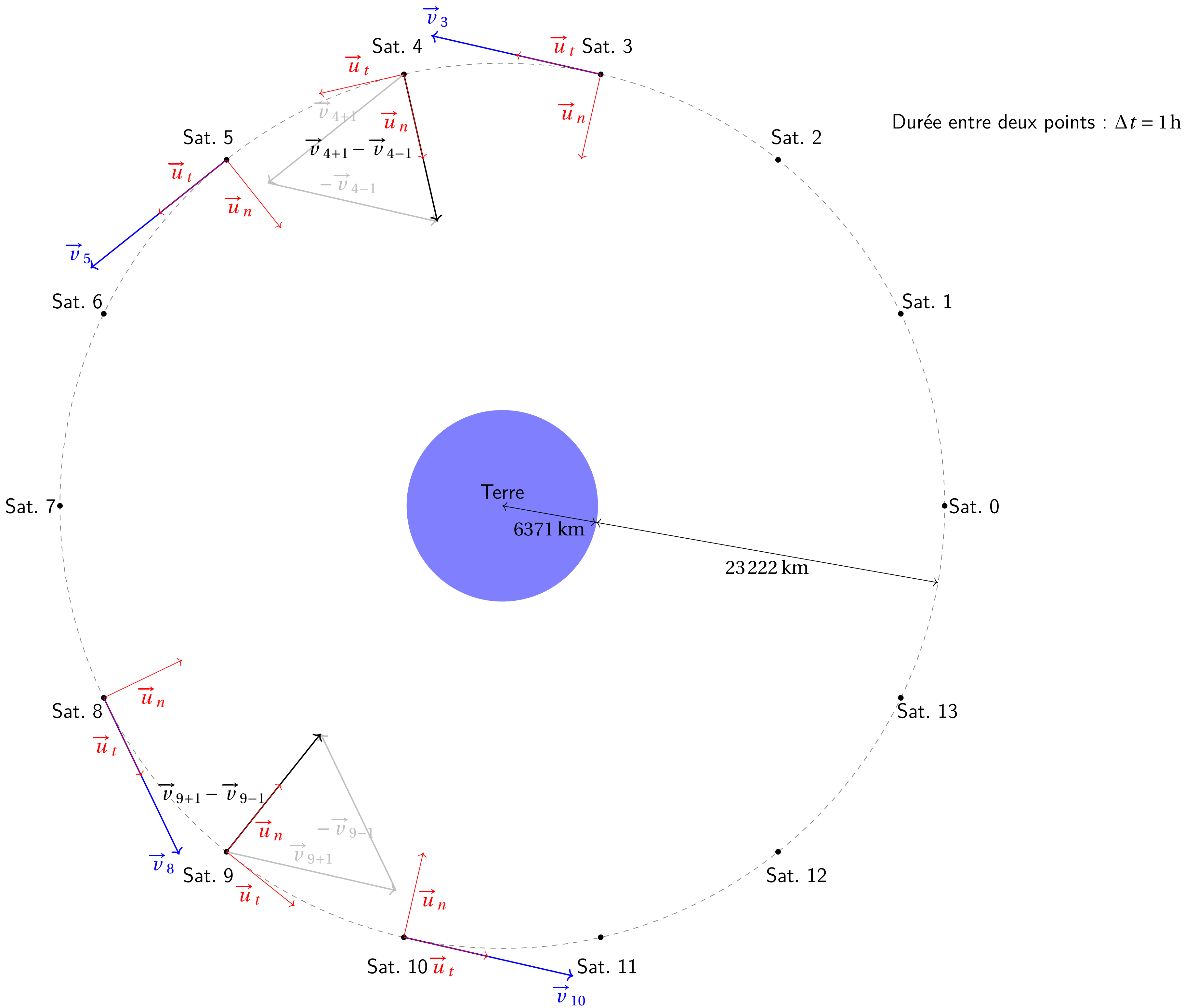
Solution: Dans le cas d'un schéma de calcul entre i et $i+1$, on obtient la figure suivante :



Dans ce cas, si le vecteur vitesse semble tangent à la trajectoire, le vecteur accélération lui n'est plus centripète, soit selon la normale à la trajectoire ($\overrightarrow{u}_n$).

Données

- Rayon de la Terre : $6371\,\text{km}$


Durée entre deux points : $\Delta t = 1\,\mathrm{h}$
Sat. 0
Sat. 1
Sat. 2
Sat. 3
Sat. 4
Sat. 5
Sat. 6
Sat. 7
Sat. 8
Sat. 9
Sat. 10
Sat. 11
Sat. 12
Sat. 13
Terre
6371 km
23 222 km
$\vec{v}_3$
$\vec{v}_5$
$\vec{v}_8$
$\vec{v}_{10}$
$\vec{u}_t$
$\vec{u}_n$
$\vec{v}_{4+1}$
$-\vec{v}_{4-1}$
$\vec{v}_{4+1} - \vec{v}_{4-1}$
$\vec{v}_{9+1}$
$-\vec{v}_{9-1}$
$\vec{v}_{9+1} - \vec{v}_{9-1}$