Correction DS 4 - Classe de Tle Spé PC

Problème 1: Athérosclérose

L'athérosclérose est une maladie chronique caractérisée par l'apparition de dépôts graisseux dans les artères, ce qui perturbe la circulation du sang. En première approximation, le sang peut être considéré comme un fluide incompressible qui s'écoule en régime permanent dans une canalisation.
À un stade avancé de la maladie, la tension artérielle (différence entre la pression du sang et la pression atmosphérique) peut être assez grande pour que l'artère se ferme momentanément. La tension artérielle du sang l'ouvre puis elle se ferme de nouveau, provoquant une palpitation vasculaire qui peut être entendue à l'aide d'un stéthoscope.
On considère ici qu'une artère saine est cylindrique, de diamètre $d_A = 1{,}0\,\text{cm}$ et que la vitesse d'écoulement du sang est de $v_A = 20\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. La masse volumique du sang est $\rho_{\text{sang}} = 1{,}06\times10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. On suppose le patient allongé ($z_A = z_B$).

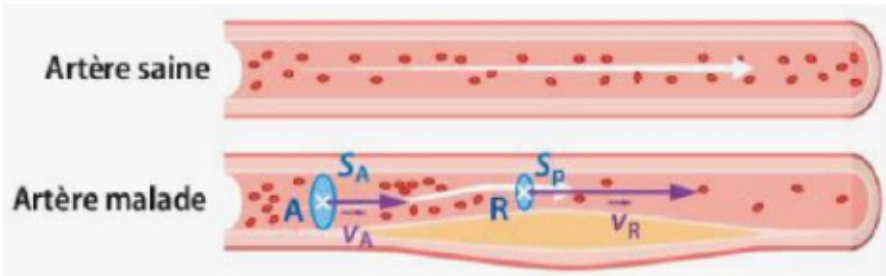


Figure 1: Comparaison entre une artère saine et une artère malade.

1. Calculer le débit volumique D_{V_A} du sang dans l'artère saine, en $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ puis en $\text{L}\cdot\text{min}^{-1}$.

> **Solution:** On sait que
> $$D_V = \frac{V}{\Delta t} = v\cdot S \tag{1}$$
> On utilise la deuxième partie de l'équation:
> $$D_{V_A} = v_A\cdot S_A = v_A\cdot\pi\left(\frac{d_A}{2}\right)^2 = 20\times10^{-2}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\times\left(\frac{1{,}0\times10^{-2}\,\text{m}}{2}\right)^2 = 1{,}6\times10^{-5}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1} = 1{,}6\times10^{-5}\times\frac{1000\,\text{L}}{1/60\text{min}} = 9{,}6\times10^{-1}\,\text{L}\cdot\text{min}^{-1} \tag{2}$$

2. Déduire, qualitativement, l'effet d'une plaque d'athérome sur la vitesse du sang au niveau de la plaque.

> **Solution:** La conservation du débit volumique donne:
> $$D_{V_A} = D_{V_R} \iff v_R\times\pi\times\left(\frac{d_R}{2}\right)^2 = v_A\cdot\pi\left(\frac{d_A}{2}\right)^2 \tag{3}$$
> Or, une artère malade implique que le diamètre d_R est inférieur à d_A, ce qui implique que $v_R > v_A$. Le fluide a une vitesse plus importante au niveau du rétrécissement de l'artère.

3. Montrer, à l'aide de la relation de Bernoulli, que dans un fluide en écoulement horizontal dans une conduite subissant un rétrécissement, une dépression (baisse de la pression) se forme au niveau du rétrécissement (effet Venturi). On rappelle que la relation de Bernoulli, valable le long d'une ligne de courant, est:
$$P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{constante} \tag{4}$$

Solution: D'après la relation de Bernoulli appliquée le long d'une ligne de courant à l'intérieur de l'artère:

$$P_R + \rho\frac{v_R^2}{2} + \rho g z_R = P_A + \rho\frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A \tag{5}$$

Or on considère l'altitude constante: $z_A = z_R$

$$P_R + \rho\frac{v_R^2}{2} = P_A + \rho\frac{v_A^2}{2} \iff P_R = P_A + \rho \times \frac{v_A^2 - v_R^2}{2} \tag{6}$$

Or d'après la question précédente, on a montré que $v_R > v_A$ donc $\left(v_A^2 - v_R^2\right) < 0$ et $P_R < P_A$. Il y a bien une dépression au niveau du rétrécissement.

4. Juste avant le rétrécissement, la tension dans l'artère est $P_A = 16\,\text{kPa}$. Estimer le diamètre d_R au niveau du rétrécissement pour lequel la pression s'annule ($P_R = 0\,\text{Pa}$). Le candidat sera récompensé pour ses recherches pertinentes même s'il n'aboutit pas au résultat final.

Solution: On a

$$P_R + \rho\frac{v_R^2}{2} = P_A + \rho\frac{v_A^2}{2} \tag{7}$$

Or, nous cherchons d_R mais v_R est aussi une inconnue. On peut le déterminer par conservation du débit volumique:

$$D_{V_R} = D_{V_A} \iff v_R \times \pi\left(\frac{d_R}{2}\right)^2 = D_{V_A} \iff V_R = \frac{D_{V_A}}{\pi}\left(\frac{2}{d_R}\right)^2 \tag{8}$$

Repassons maintenant à la relation de Bernoulli:

$$P_R + \rho\frac{v_R^2}{2} = P_A + \rho\frac{v_A^2}{2} \iff V_R^2 = v_A^2 + 2 \times \frac{P_A - P_R}{\rho} \tag{9}$$

On remplace v_R par son expression en fonction de d_R:

$$\frac{D_{V_A}^2}{\pi^2}\left(\frac{2}{d_R}\right)^4 = v_A^2 + 2 \times \frac{P_A - P_R}{\rho} \tag{10}$$

$$\left(\frac{2}{d_R}\right)^4 = \frac{\pi^2}{D_{V_A}^2} \times \left[v_A^2 + 2 \times \frac{P_A - P_R}{\rho}\right] \tag{11}$$

$$\frac{2}{d_R} = \sqrt{\frac{\pi}{D_{V_A}}} \times \left[v_A^2 + 2 \times \frac{P_A - P_R}{\rho}\right]^{1/4} \tag{12}$$

$$d_R = \frac{2}{\sqrt{\frac{\pi}{D_{V_A}}} \times \left[v_A^2 + 2 \times \frac{P_A - P_R}{\rho}\right]^{1/4}} \tag{13}$$

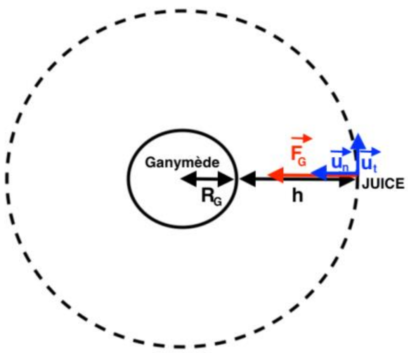
$$d_R = \frac{2}{\sqrt{\frac{\pi}{1,6\times10^{-5}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}}} \times \left[(20 \times 10^{-2}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 + 2 \times \frac{16\times10^3\,\text{Pa} - 0\,\text{kPa}}{1,06\times10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}}\right]^{1/4}} \tag{14}$$

$$d_R = 1,9 \times 10^{-3}\,\text{m} \tag{15}$$

L'artère mesure 1,9 mm de diamètre lorsqu'elle est malade.

Correction du problème 3. à la découverte des lunes glacées de Jupiter

Q.1.



Q.2.

$$\overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{F_{Ganymede/JUICE}} = G \times \frac{M_G \times M_J}{(R_G + h)^2} \vec{u}_N$$

Q.3.

Système : sonde JUICE

Référentiel : Centré sur Ganymède supposé galiléen.

D'après la 2[nd] loi de Newton :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = M_J \vec{a}$$

$$\overrightarrow{F_{Ganymede/JUICE}} = M_J \vec{a}$$

$$G \times \frac{M_G \times M_J}{(R_G + h)^2} \vec{u}_N = M_J \vec{a}$$

$$\vec{a} = G \times \frac{M_G}{(R_G + h)^2} \vec{u}_N$$

Pour un mouvement circulaire, dans le repère de Frenet, le vecteur accélération est de la forme :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R_G + h} \vec{u}_N + \frac{dv}{dt} \vec{u}_T$$

L'accélération étant unique, par identification :

$\frac{dv}{dt} = 0$ donc la vitesse est constante : le mouvement est uniforme.

Q.4.

$$\vec{a} = G \times \frac{M_G}{(R_G + h)^2} \vec{u}_N$$

Pour un mouvement circulaire, dans le repère de Frenet, le vecteur accélération est de la forme :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R_G + h}\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$$

L'accélération étant unique, par identification :

$$\frac{v^2}{R_G + h} = G \times \frac{M_G}{(R_G + h)^2}$$

$$v^2 = G \times \frac{M_G}{R_G + h}$$

$$v = \sqrt{G \times \frac{M_G}{R_G + h}}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \times M_G}{R_G + h}}$$

Q.5.

La période de révolution est :

$$T = \frac{\text{Périmètre d'un cercle}}{\text{vitesse}} = \frac{2\pi \times (R_G + h)}{v} = \frac{2\pi \times (R_G + h)}{\sqrt{\frac{G \times M_G}{R_G + h}}} = 2\pi \times (R_G + h) \times \sqrt{\frac{R_G + h}{G \times M_G}}$$

$$T = 2\pi \times \sqrt{(R_G + h)^2 \times \frac{R_G + h}{G \times M_G}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_G + h)^3}{G \times M_G}}$$

$$T_{500} = 2\pi\sqrt{\frac{(2{,}63 \times 10^3 \times 10^3 + 500 \times 10^3)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}82 \times 10^{23}}}$$

$$T_{500} = 9{,}99 \times 10^3 \text{s}$$

$$T_{500} = \frac{9{,}99 \times 10^3}{3600}$$

$$T_{500} = 2{,}77 \text{ h}$$

Q.6.

D'après la 3ème loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{Constante}$$

Ainsi :

$$\frac{T_{circulaire}^2}{(R_G + h_{circulaire})^3} = \frac{T_{500}^2}{(R_G + h_{500})^3}$$

$$T_{circulaire}^2 = \frac{T_{500}^2}{(R_G + h_{500})^3} \times (R_G + h_{circulaire})^3$$

$$T_{circulaire} = \sqrt{\frac{T_{500}^2}{(R_G + h_{500})^3} \times (R_G + h_{circulaire})^3}$$

$$T_{circulaire} = \sqrt{\frac{(9{,}99 \times 10^3)^2}{(2{,}63 \times 10^3 \times 10^3 + 500 \times 10^3)^3} \times (2{,}63 \times 10^3 \times 10^3 + 5000 \times 10^3)^3}$$

$T_{circulaire} = 3{,}80 \times 10^4\ \mathrm{s}$

Q.7.

D'après le texte, la sonde JUICE se placera sur différentes orbites autour de Ganymède :

90 jours sur une orbite circulaire d'altitude 5 000 Km

102 jours sur une orbite circulaire d'altitude 500 Km

Calculons le nombre de tours effectuées durant ces deux phases :

102 jours sur une orbite circulaire d'altitude 500 Km

1 Tour	$9{,}99 \times 10^3 \mathrm{s}$
N Tours	$102 \text{ jours} = 102 \times 24 \times 3600 = 8{,}8 \times 10^6\ \mathrm{s}$

$$N = \frac{8{,}8 \times 10^6 \times 1}{9{,}99 \times 10^3}$$

$N = 880 \text{ tours}$

90 jours sur une orbite circulaire d'altitude 5 000 Km

1 Tour	$3{,}80 \times 10^4\ \mathrm{s}$
N Tours	$90 \text{ jours} = 90 \times 24 \times 3600 = 7{,}8 \times 10^6\ \mathrm{s}$

$$N = \frac{7{,}8 \times 10^6 \times 1}{3{,}80 \times 10^4}$$

$N = 205 \text{ tours}$

JUICE tournera 880+205=1085 fois autour de Ganymède pendant ces deux phases. Durant les deux autre phases, JUICE effectuera d'autres tours pour atteindre les 1167 tours.

Q.8.

Les ondes radio appartiennent aux ondes électromagnétiques.

Q.9.

Calculons le temps mis par le signal radio pour faire un aller-retour :

$$c = \frac{2 \times d}{\Delta t}$$

$c \times \Delta t = 2 \times d$

$$\Delta t = \frac{2 \times d}{c}$$

$$\Delta t = \frac{2 \times 9{,}3 \times 10^8 \times 10^3}{3{,}00 \times 10^8}$$

$\Delta t = 6200\ \mathrm{s}$

$\Delta t = 1\mathrm{h}\ 43\ \mathrm{min}\ 20\ \mathrm{s}$

Remarque : ce temps est proche de celui annoncé dans le texte.

CORRECTION Yohan Atlan © www.vecteurbac.fr