Nom:............................ Prénom:............................ Classe:.................... Date: ....

La gamme tempérée

Objectifs	Classe
☐ En musique, un intervalle entre deux sons est défini par le rapport de leurs fréquences fondamentales. Deux sons dont les fréquences sont dans le rapport 2/1 correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes. L'intervalle qui les sépare s'appelle une octave. ☐ Une gamme est une suite finie de notes réparties sur une octave.	$1^{\text{ère}}$ ES **Durée** 1 h

Document 1

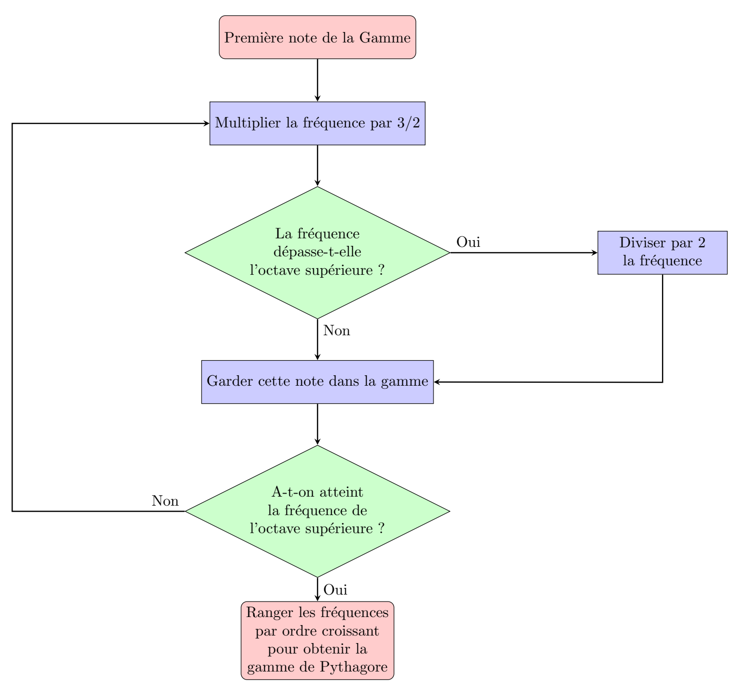
Note	Fréquence (Hz)
Do2	130,81
Do#2	138,59
Ré2	146,83
Ré#2	155,56
Mi2	164,81
Fa2	174,61
Fa#2	185,00
Sol2	196,00
Sol#2	207,65
La2	220,00
La#2	233,08
Si2	246,94
Do3	261,63
Do#3	277,18
Ré3	293,67
Ré#3	311,13
Mi3	329,63
Fa3	349,23
Fa#3	370,00
Sol3	392,00
Sol#3	415,31
La3	440,00
La#3	466,16
Si3	493,88
Do4	523,25
Do#4	554,37
Ré4	587,33
Ré#4	622,25
Mi4	659,26
Fa4	698,46
Fa#4	739,99
Sol4	783,99
Sol#4	830,61
La4	880,00
La#4	932,33
Si4	987,77

Table 1: Fréquence de quelques notes

Document 2: Ronde des quintes

Pythagore veut créer une gamme, c'est-à-dire un nombre précis de notes entre deux octaves. Il propose alors de partir de la corde entière dont la note correspond au fondamentale puis de prendre la **quinte** qui est la note associée au rapport de l'harmonique 3 sur l'harmonique 2 (ce qui revient **à multiplier le fondamental par 3/2**). Il continue en prenant ensuite la quinte de la quinte, puis la quinte de la quinte de la quinte et ainsi de suite.
Si la fréquence de la corde entière vaut f_1, alors la fréquence de l'octave vaut le double et les notes sont identiques, il faut donc que **les notes de la gamme se trouve entre la note et son octave**. On cherche donc les quintes dont la fréquence est comprise entre f_1 et $2f_1$.

Document 3: Algorithme du calcul des fréquences des notes de la gamme de Pythagore



1 Rappels: la gamme de Pythagore

1. En partant d'une note de La3 à 440,0 Hz, compléter la ronde des quintes suivante.

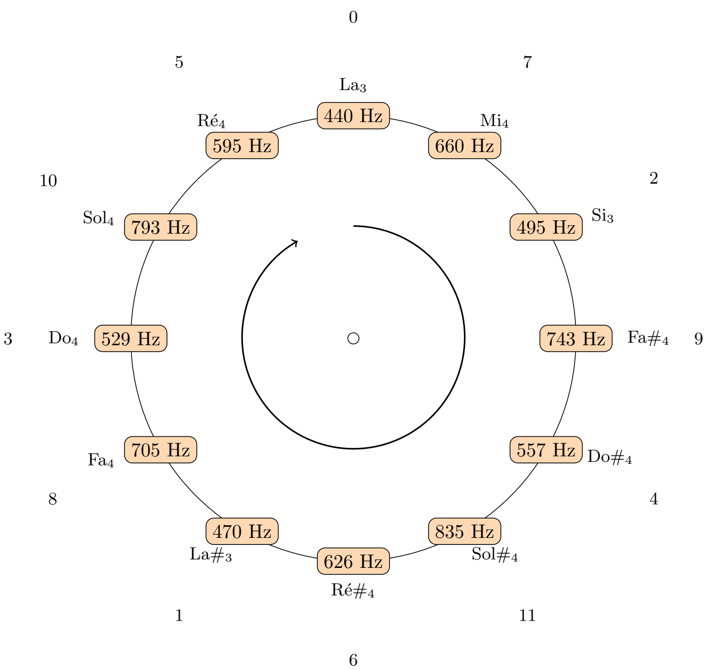


Figure 1: Cycle des quintes

2. Rappeler ce qu'on appelle la quinte du loup et le comma.

Solution: La quinte du Loup correspond à la dernière quinte du cycles des quintes de Pythagore: on devrait reboucler sur le La ce qui n'est pas le cas. On appelle alors comma la différence de fréquence entre la note à l'octave théorique et celle obtenue lors du cycle des quintes.

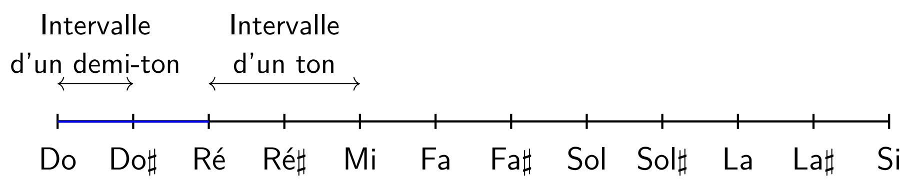
2 Création de la gamme tempérée

Document 4: La gamme tempérée

Figure 2: Jean-Sébastien Bach (1685-1750).

Pour résoudre le problème lié à la quinte du loup, de nombreux musiciens, dont Jean-Sébastien Bach notamment avec son livre *Le Clavier bien tempéré* paru en 1722, proposent une nouvelle manière de découper une gamme : la gamme tempérée.
Le principe de la gamme tempérée, d'après Bach, est simple : « Le rapport de l'octave étant égal à 2 et contenant douze intervalles, il suffit de les diviser en **12 intervalles égaux** (12 demi-tons).

Document 5: transposition, ton et demi-ton



La transposition d'un morceau de musique consiste à décaler toutes ses notes d'un intervalle fixe vers l'aigu ou le grave. La transposition peut s'effectuer soit à l'écriture de la partition soit au moment de l'interprétation.

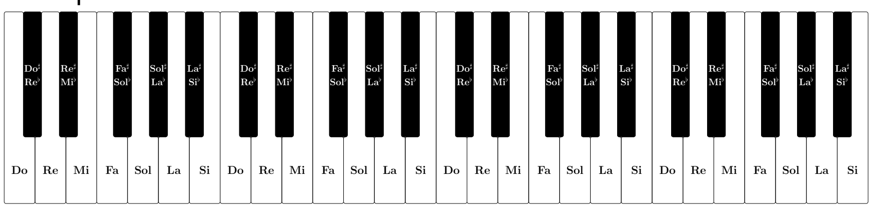


Figure 3: Posé sur la manche de la guitare, le capodastre transpose la mélodie jouée vers l'aigu.

3. Quel est le lien mathématique entre f_{12}, la fréquence à l'octave et f_0 la fréquence de la note de départ ?

Solution: $\frac{f_{12}}{f_0} = 2$ puisqu'on prend l'octave, c'est-à-dire le double de fréquence.

4. Nous cherchons ici à passer d'une note à l'autre avec un intervalle r constant. On peut remarquer l'égalité suivante: $\frac{f_{12}}{f_0} = \frac{f_{12}}{f_5} \times \frac{f_5}{f_{10}} \times \frac{f_{10}}{f_3} \times \frac{f_3}{f_8} \times \frac{f_8}{f_1} \times \frac{f_1}{f_6} \times \frac{f_6}{f_{11}} \times \frac{f_{11}}{f_4} \times \frac{f_4}{f_9} \times \frac{f_9}{f_2} \times \frac{f_2}{f_7} \times \frac{f_7}{f_0}$
Quel est le lien mathématique entre $\frac{f_{12}}{f_0}$ et r ?

Solution: $\frac{f_{12}}{f_0} = \frac{f_{12}}{f_5} \times \frac{f_5}{f_{10}} \times \frac{f_{10}}{f_3} \times \frac{f_3}{f_8} \times \frac{f_8}{f_1} \times \frac{f_1}{f_6} \times \frac{f_6}{f_{11}} \times \frac{f_{11}}{f_4} \times \frac{f_4}{f_9} \times \frac{f_9}{f_2} \times \frac{f_2}{f_7} \times \frac{f_7}{f_0} = r^{12}$

5. Déduire des deux questions précédentes la valeur de r.

Solution: $\frac{f_{12}}{f_0} = r^{12} = 2$ donc $r = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12} = 1{,}0595$

6. Dans le tableau ci-dessous, comment passe-t-on du La au La# (c'est-à-dire d'une colonne à la suivante) ? Et du La au Ré (c'est-à-dire la 5ème note calculée)?

f (Hz)	440,00	466,16	493,88	523,25	554,37	587,33	622,25	659,26	698,46	739,99	783,99	830,61	880,00
Note	La_3	$La_3\sharp$	Si_3	Do_4	$Do_4\sharp$	$Ré_4$	$Ré_4\sharp$	Mi_4	Fa_4	$Fa_4\sharp$	Sol_4	$Sol_4\sharp$	La_4

Solution: On multiplie par $r = 1{,}0595$ la valeur de la colonne précédente pour obtenir la nouvelle.
Pour calculer la fréquence de la 5ème note, on multiplie par r^5: $f(Ré) = f(La) \times r^5 = 440 \times 1{,}0595^5 = 587{,}4\,\mathrm{Hz}$

7. Donner l'expression permettant d'obtenir la fréquence de la n+1-ème note à partir de la n-ème note ? De quel outil mathématique a-t-on affaire ?

Solution: $f_{n+1} = f_n \times r$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison r.

8. Donner la formule générale (forme explicite) permettant de calculer la fréquence de la n-ième note en fonction de n et r.

Solution: $f(n) = f(La) \times r^n$

9. Calculer les nouvelles fréquences des notes manquantes dans le tableau précédent.
10. Les notes sont-elles consonantes avec la gamme tempérée ?

Solution: $r = \sqrt[12]{2}$ qui est un nombre irrationnel (ne s'écrit pas sous la forme de fraction de deux nombres entiers) donc les notes ne sont pas consonantes. Cependant, l'oreille aura du mal à faire la différence avec les fréquences de la gamme de pythagore (Exemple, $659{,}26\,\mathrm{Hz}$ au lieu de $660{,}00\,\mathrm{Hz}$ pour le Mi4).

11. Lors d'une transposition, la tonalité d'un morceau de musique est augmentée de deux tons et demi. Par quelle note le La est-il alors remplacé ?

Solution: On a donc au total une augmentation de 5 demi-tons: on passe du La 3 au Ré 4.

12. Indiquer sur le clavier du document 5 si on a un demi-ton ou un ton entre:
    - une touche blanche et une noire consécutives,
    - entre deux touches blanches consécutives séparées par une touche noire,
    - pour deux touches blanches consécutives non séparée par une noire.

Solution:

- une touche blanche et une noire consécutives: **un demi-ton**,
- entre deux touches blanches consécutives séparées par une touche noire: **un ton**,
- pour deux touches blanches consécutives non séparée par une noire: **un demi-ton**.