

Nom:..... Prénom:..... Classe:..... Date:

La gamme de Pythagore

✔ Objectifs	👤 Classe
☐ En musique, un intervalle entre deux sons est défini par le rapport de leurs fréquences fondamentales. Deux sons dont les fréquences sont dans le rapport 2/1 correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes. L'intervalle qui les sépare s'appelle une octave. Une gamme est une suite finie de notes réparties sur une octave. ☐ Une gamme est une suite finie de notes réparties sur une octave.	1 ^{ère} ES
	🕒 Durée
	1 h

Il y a eu, dans l'Histoire, de nombreuses constructions de gammes pour ordonner les notes au sein d'une octave. Les premières gammes furent appelées naturelles, car elles étaient construites à partir de sons émis par des cordes vibrantes de différentes longueurs.

Il existe une infinité de fréquences, donc de notes possibles. Comment choisir alors les fréquences qui constitueront l'ensemble des notes d'une gamme ?

Pythagore, qui pensait que le monde pouvait être expliqué par les mathématiques, a été le premier à relier cette science à la musique. Il est à l'origine de la première gamme connue.

📄 Document 1

- **Intervalle:** Le rapport $\frac{f_2}{f_1}$ entre deux notes de fréquences f_1 et f_2 telles que $f_2 > f_1$ s'appelle un intervalle en musique.
- **Octave:** Lorsqu'un intervalle entre deux notes vaut **2**, on appelle cet intervalle une octave. Deux notes à l'octave portent le même nom.

📄 Document 2: Gamme

Une **gamme** est une suite montante ou descendante de notes **comprises dans une octave**, suivant des intervalles déterminés.

1. La fréquence du do 1 vaut 65,41 Hz. Que vaut la fréquence du do à l'octave supérieure ?

Solution: $\frac{f(do2)}{f(do1)} = 2 \iff f(do2) = 2 \times f(do1) = 2 \times 65,40 \text{ Hz} = 130,8 \text{ Hz}$ Le do 2 a pour fréquence 130,8 Hz.

2. Quelle note est alors jouée à l'octave supérieure ?

Solution: Il s'agit également d'un do (do2).

Document 3

Note	Fréquence (Hz)
Do1	65
Do#1	69
Ré1	73
Ré#1	78
Mi1	82
Fa1	87
Fa#1	93
Sol1	98
Sol#1	104
La1	110
La#1	117
Si1	123
Do2	131
Do#2	139
Ré2	147
Ré#2	311
Mi2	165
Fa2	175
Fa#2	185
Sol2	196
Sol#2	208
La2	220
La#2	466
Si2	247
Do3	262
Do#3	277
Ré3	294
Ré#3	311
Mi3	330
Fa3	349
Fa#3	370
Sol3	392
Sol#3	415
La3	440
La#3	466
Si3	494

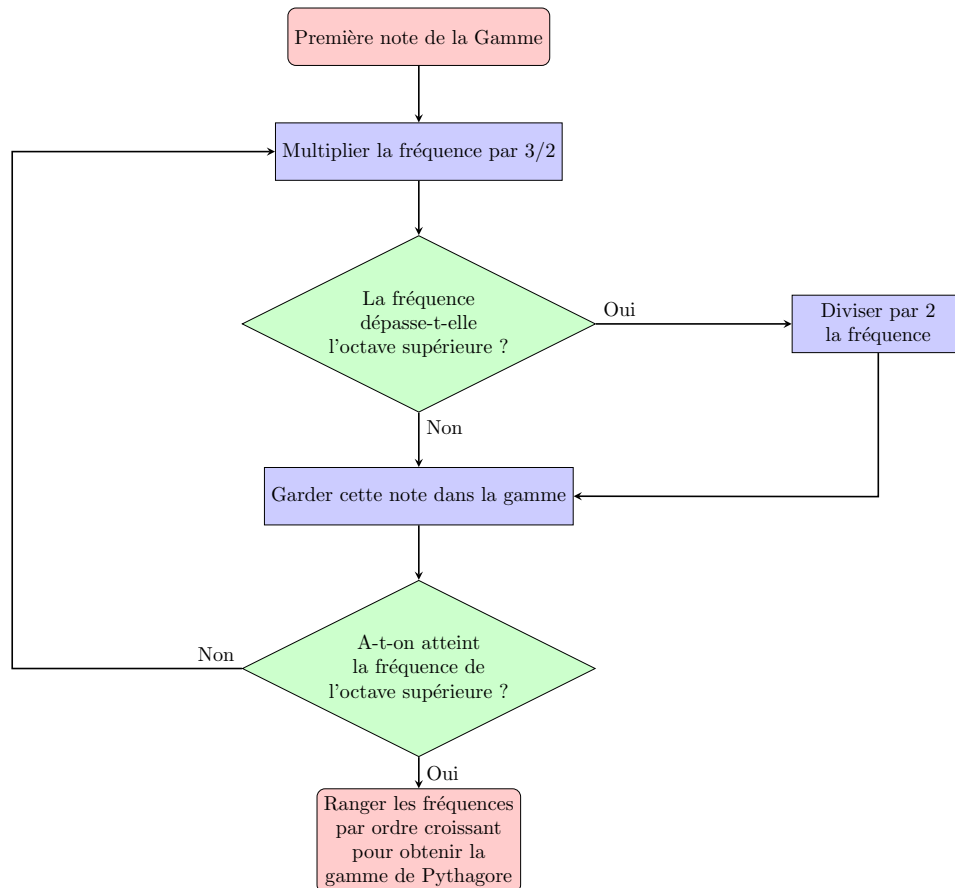
Table 1: Fréquence de quelques notes

Document 4: Ronde des quintes

Pythagore veut créer une gamme, c'est-à-dire un nombre précis de notes entre deux octaves. Il propose alors de partir de la corde entière dont la note correspond au fondamentale puis de prendre la **quinte** qui est la note associée au rapport de l'harmonique 3 sur l'harmonique 2 (ce qui revient à **multiplier le fondamental par $3/2$**). Il continue en prenant ensuite la quinte de la quinte, puis la quinte de la quinte de la quinte et ainsi de suite.

Si la fréquence de la corde entière vaut f_1 , alors la fréquence de l'octave vaut le double et les notes sont identiques, il faut donc que **les notes de la gamme se trouve entre la note et son octave**. On cherche donc les quintes dont la fréquence est comprise entre f_1 et $2f_1$.

Document 5: Algorithme du calcul des fréquences des notes de la gamme de Pythagore



3. Compléter, à l'aide du professeur, le tableau et la figure suivante:

65,41 Hz
98,12 Hz
73,59 Hz
110,4 Hz
82,80 Hz
124,2 Hz
93,15 Hz
69,86 Hz
104,8 Hz
78,60 Hz
117,9 Hz
88,43 Hz
132,7 Hz

Table 2: Calcul des fréquences des notes de la gamme de pythagore

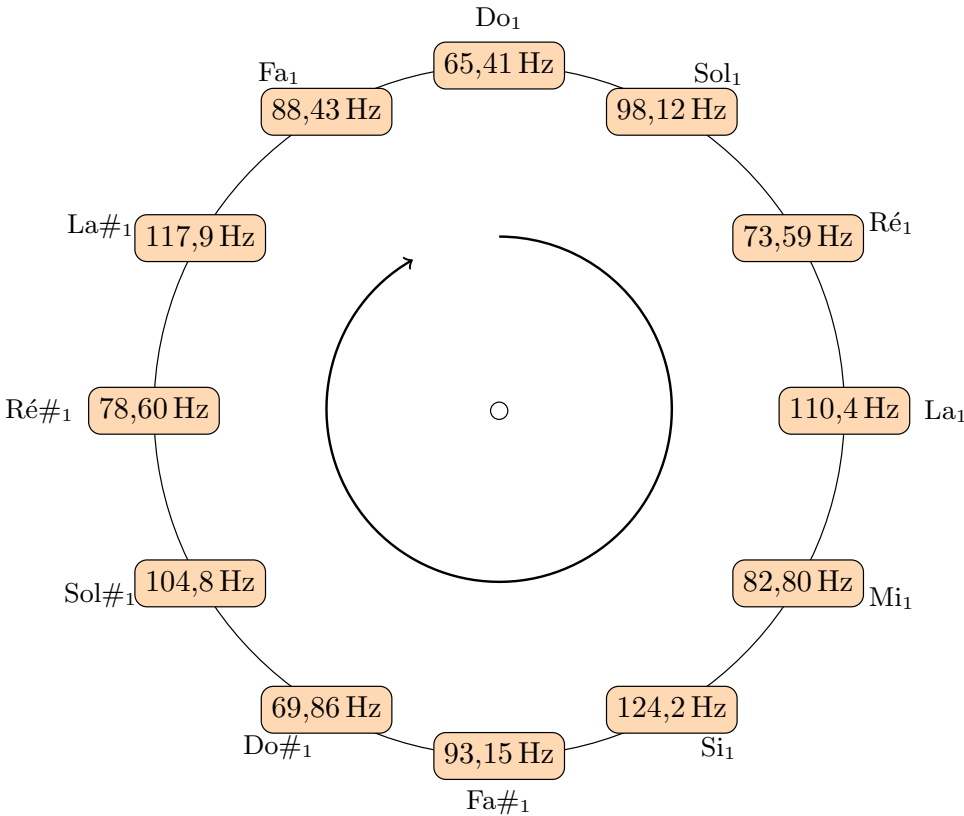
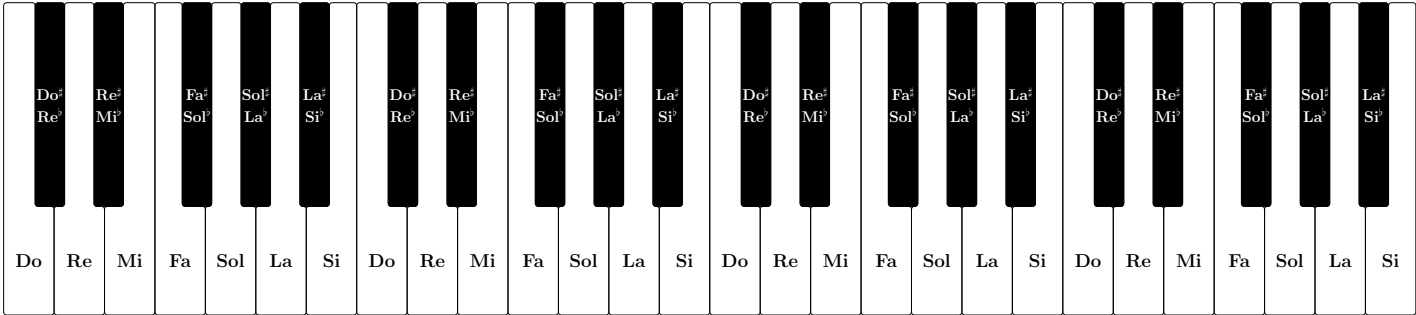


Figure 1: Cycle des quintes

4. Observer ce clavier de piano. Combien de touches y-a-t-il entre deux octaves ? Pourquoi ?



Solution: Il y a douze touches de piano dans une octave, soit 12 notes, qui correspondent aux douze notes de la gamme de Pythagore.

5. Recommencer ce travail seuls, en partant d'une note de La3 à 440,0 Hz.

440,0 Hz
660,0 Hz
495,0 Hz
742,5 Hz
556,9 Hz
835,4 Hz
626,6 Hz
470,0 Hz
705 Hz
528,8 Hz
793,2 Hz
594,9 Hz
892,4 Hz

Table 3: Calcul des fréquences des notes de la gamme de pythagore

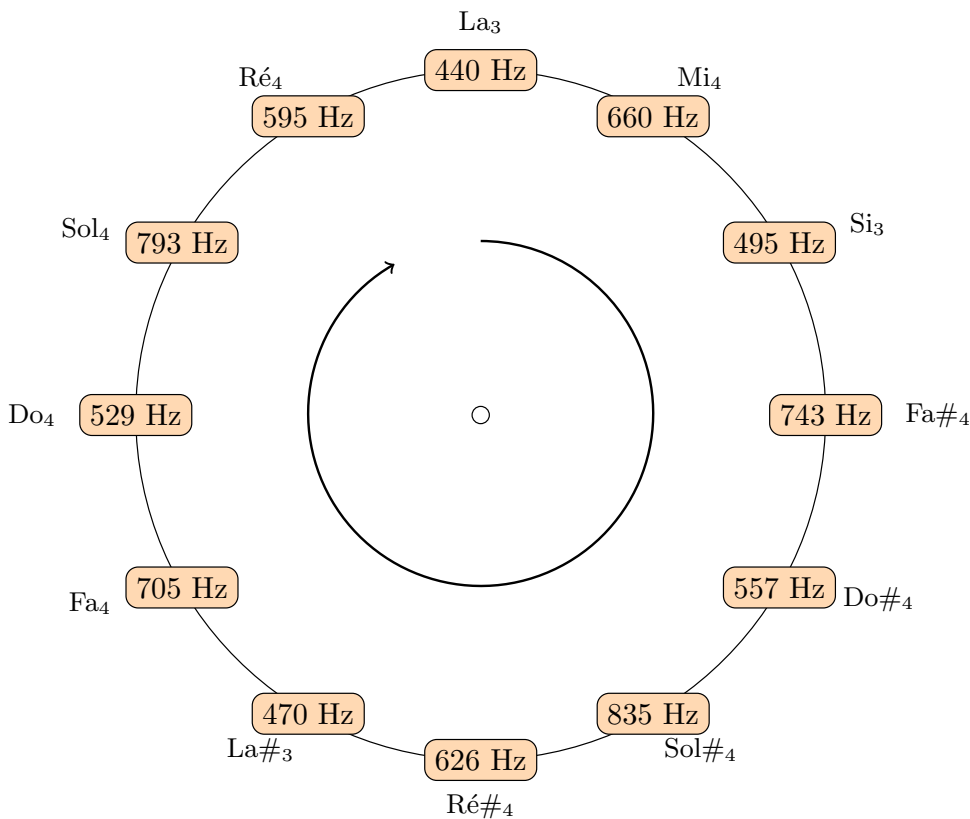


Figure 2: Cycle des quintes

6. Jouer en même temps un son dont la fréquence est de 440 Hz, et son octave. Recommencer avec 440 Hz et la dernière fréquence trouvée dans le tableau. Que remarque-t-on ?

Solution: On peut jouer plusieurs sons en ouvrant plusieurs fois la page: <https://www.szynalski.com/tone-generator/>.
La résultante du son à 440 Hz et son octave (à 880 Hz) sont consonants, alors que ce n'est pas le cas pour les sons à 440 Hz et 892,4 Hz.

7. Au bout de 12 quintes, peut-on considérer que l'on retrouve la note de référence de la gamme ? Est-ce perceptible à l'oreille ?

Solution: Au bout de 12 quintes, on ne reboucle pas exactement sur la fréquence de l'octave, ce qui est perceptible à l'oreille.

Document 6: Quinte du loup

Pythagore se rend compte que $f_{12} \approx 2f_0$ mais qu'il y a un décalage appelé **comma**. Il semble qu'une octave puisse être divisée en 12 intervalles réguliers (en rapport !). On peut donc se demander pourquoi n'avoir gardé que 7 notes et introduit des dièses et autres bémols.

Les notes de f_0 à f_{12} sont consonantes deux à deux (cycle des quintes), f_0 l'est parfaitement avec $2f_0$ mais f_{12} ne l'est plus du tout avec $2f_0$.

Cette quinte, appelée la quinte du loup parce qu'elle rappelle le hurlement du loup, n'est pas consonante avec les autres (elle sonne faux). L'écart entre la quinte du loup et les autres quintes est appelé **comma pythagoricien** (représenté en rouge ci-contre). Pour contourner cette difficulté, les compositeurs choisissaient de positionner la quinte du loup dans le cycle sur un intervalle peu utilisé dans leur composition musicale.

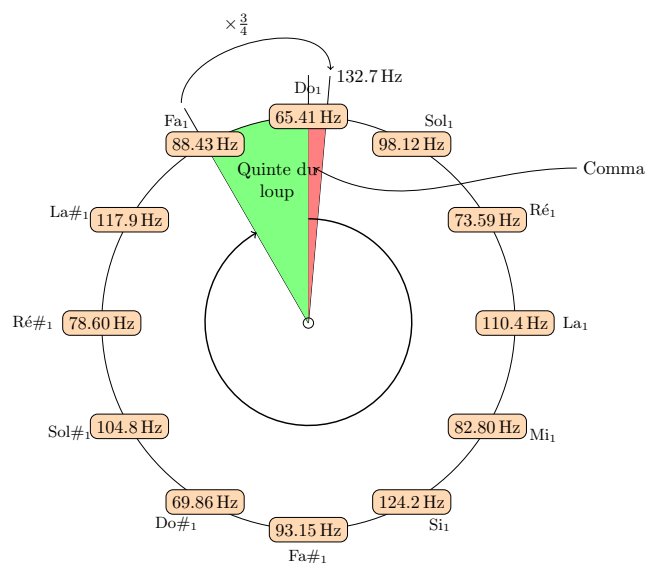


Figure 3: Quinte du loup

8. Quel est l'ordre de grandeur du comma pythagoricien pour le cas du La_3 comme note de départ ? L'oreille est-elle capable de faire la différence ?

Solution: $892,4 \text{ Hz} - 880 \text{ Hz} = 12,4 \text{ Hz}$

Si cette différence de fréquence peut paraître faible, l'oreille rend bien compte de cette différence.

9. Qu'est-ce que cela a entraîné pour les compositeurs de musique ?

Solution: Les compositeurs choisissaient de positionner la quinte du loup dans le cycle sur un intervalle peu utilisé dans leur composition musicale.

10. Comment remédier à ce problème ?

Solution: On peut répartir le comma pythagoricien de façon régulière sur toutes les intervalles de la gamme : c'est le principe de la gamme tempérée. Ainsi, toutes les tonalités deviennent utilisables, même si aucune quinte n'est parfaitement juste.