

Nom:..... Prénom:..... Classe:..... Date:

Mesure du méridien par Delambre et Méchain

✔ Objectifs

- ☐ Historiquement, des méthodes géométriques ont permis de calculer la longueur d'un méridien à partir de mesures d'angles ou de longueurs : méthode d'Ératosthène et principe de triangulation plane de Delambre et Méchain.
- ☐ Expliquer la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain.

👤 Classe

1^{ère} ES

🕒 Durée

1 h

Lors de la révolution française de 1789, le constat est fait que de nombreuses unités de mesure de longueur sont basées sur les dimensions du corps humain et sont totalement arbitraires (coudée, toise, etc.) et n'ont pas forcément même valeur d'une région à l'autre. L'Assemblée Constituante décide de définir une unité unique et universelle : le mètre.

L'Assemblée Constituante enverra Delambre et Méchain effectuer la mesure d'une fraction du méridien terrestre par la méthode dite de triangulation^a.

En quoi consiste la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain ?



Figure 1: Mètre étalon du musée de l'école Polytechnique de Paris

^aActivité basée sur <https://rmspc.fr>

📄 Document 1: Méthode de Delambre et Méchain

Delambre et Méchain commencent par constituer un réseau de points autour du méridien, de préférence en hauteur (sommets de collines, clochers, tours de châteaux, ...) afin qu'ils puissent être repérables depuis les autres points aux alentours. Ils mesurent ensuite, à l'aide de deux règles, la distance entre Melun et Lieusaint (voir docs ci-dessous). Ils trouvent 11,8 km. Cette distance va leur servir de base. Depuis Melun, ils utilisent alors un cercle répétiteur (voir ci-contre), dont l'une des lunettes vise Lieusaint et l'autre Malvoisine, afin de connaître l'angle $\widehat{M}$ entre ces deux villes. Puis, ils répètent cette étape depuis Lieusaint pour trouver l'angle $\widehat{L}$ entre Melun et Malvoisine. Enfin, en appliquant la loi des sinus, ils déterminent la distance LV entre Lieusaint et Malvoisine, et la distance MV entre Malvoisine et Melun. Ils appliquent ensuite cette même méthode au triangle formé par les villes de Lieusaint, Malvoisine et Montlhéry. Ayant déterminé les distances entre ces trois villes, ils peuvent calculer la longueur d'une portion de méridien, en utilisant une autre loi trigonométrique (loi d'Al-Kashi). En procédant ainsi de proche en proche, ils calculent la longueur de toutes les petites portions du méridien entre Dunkerque et Barcelone. Leur somme donne la valeur de 1111,11 km. Le mètre sera alors défini comme étant la dix-millionième partie du quart du cercle méridien (cercle méridien = un méridien + son antiméridien (soit 2 demi-cercles)).

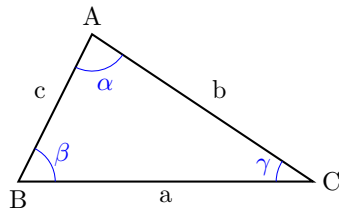


Figure 2: Cercle répétiteur¹

¹ Par Rama, CC BY-SA 3.0 fr, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=88916205>

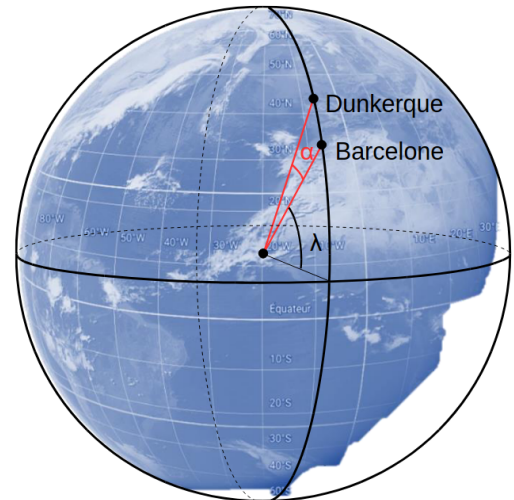
Document 2: Définitions utiles

- Un grand cercle est un cercle dessiné à la surface de la Terre et qui a la même circonférence qu'elle.
- En géographie, un méridien est un demi-grand cercle allant du pôle nord au pôle sud.
- La latitude λ d'un lieu désigne l'angle au centre de la Terre qui intercepte l'arc de méridien entre l'équateur et ce point.
- Loi des sinus: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$



- Les angles d'un triangle sont supplémentaires, c'est-à-dire que la somme de leur mesure vaut 180° : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

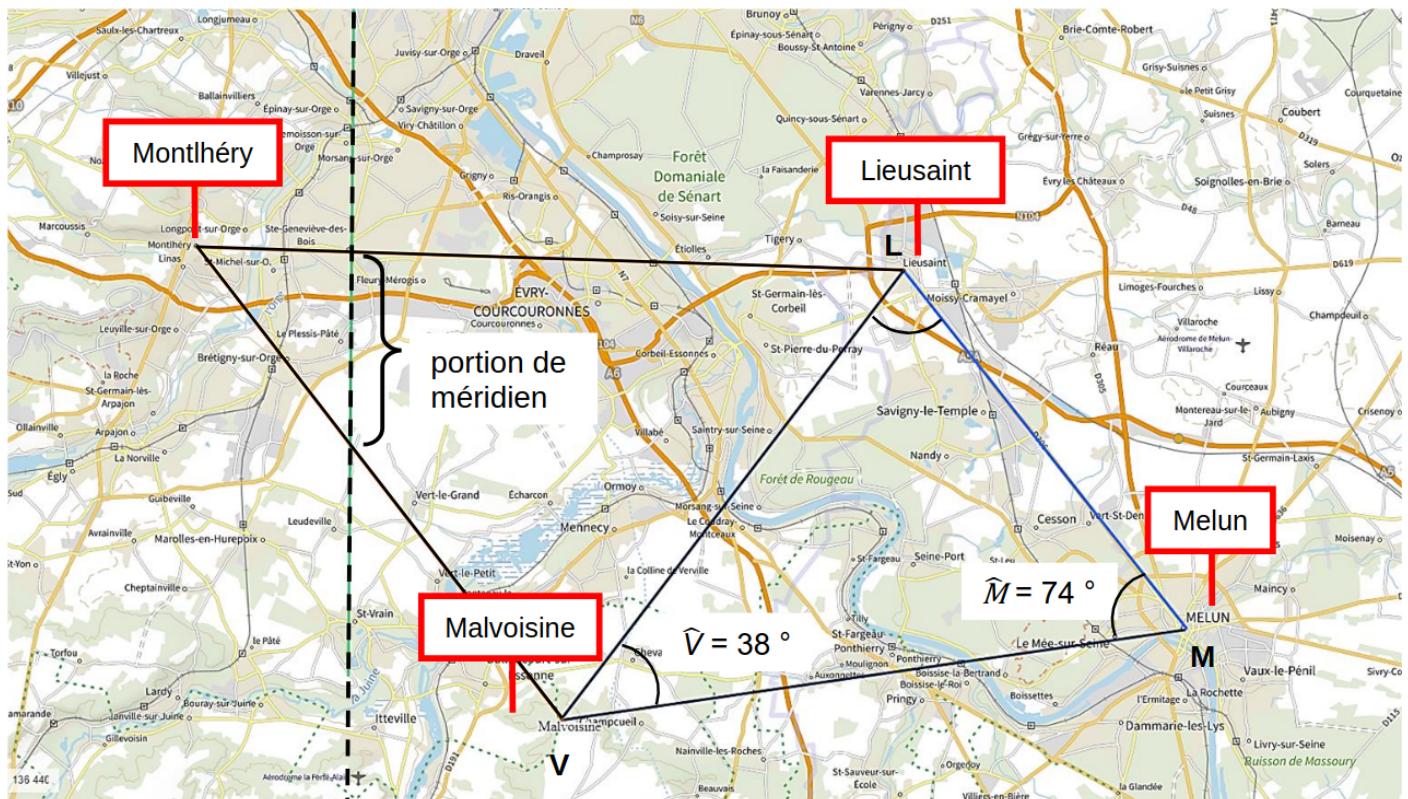
Document 3: Méridien passant par Dunkerque et Barcelone



- Latitude à Dunkerque $\lambda_D = 51^\circ$;
- Latitude à Barcelone $\lambda_B = 41^\circ$.

Document 4: Premières visées obtenues à partir de la base "Melun-Lieusaint"

Les villes de Melun, Malvoisine et Lieusaint forment les trois sommets respectifs du triangle MVL.



1. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{L}$ au sommet L du triangle MVL.

Solution: On utilise la propriété des angles supplémentaires: $\widehat{V} + \widehat{M} + \widehat{L} = 180^\circ$ donc $\widehat{L} = 180^\circ - \widehat{M} - \widehat{V} = 180^\circ - 74^\circ - 38^\circ = 68^\circ$.

L'angle $\widehat{L}$ vaut 68° .

2. Déterminer les valeurs des longueurs LV et MV.

Solution: On sait que $LM = 11,8\text{km}$. On utilise la loi des sinus:

$$\frac{LM}{\sin(\widehat{V})} = \frac{LV}{\sin(\widehat{M})} = \frac{VM}{\sin(\widehat{L})} \quad (1)$$

Nous connaissons l'ensemble des angles et la longueur LM donc

$$\frac{LM}{\sin(\widehat{V})} = \frac{LV}{\sin(\widehat{M})} \iff LV = \frac{LM}{\sin(\widehat{V})} \times \sin(\widehat{M}) = \frac{11,8\text{km}}{\sin(38^\circ)} \times \sin(74^\circ) = 18,4\text{km} \quad (2)$$

$$\frac{LM}{\sin(\widehat{V})} = \frac{VM}{\sin(\widehat{L})} \iff VM = \frac{LM}{\sin(\widehat{V})} \times \sin(\widehat{L}) = \frac{11,8\text{km}}{\sin(38^\circ)} \times \sin(68^\circ) = 17,8\text{km} \quad (3)$$

3. Exploiter la valeur obtenue par Delambre et Méchain de la distance entre Dunkerque et Barcelone pour déterminer la longueur du cercle méridien. Vérifier la cohérence du résultat avec la définition du mètre retenue à l'époque.

Solution: Delambre et Méchain ont obtenu 1111,11 km comme distance entre Dunkerque et Barcelone, ce qui correspond à l'angle $\alpha = 10^\circ$.

1111,11 km	10°
ℓ	360°

Un simple produit en croix donne la longueur du méridien ℓ : $\ell = \frac{1111,11\text{km} \times 360^\circ}{10^\circ} = 4,0 \times 10^4\text{km}$

Or on a défini le mètre comme étant "la dix-millionième partie du quart du cercle méridien": le quart de méridien a pour longueur $4,0 \times 10^4\text{km} / 4 = 1,0 \times 10^4\text{km}$, et la dix-millionième partie de cette valeur est $1,0 \times 10^4\text{km} / 10 \times 10^6 = 1,0 \times 10^7\text{m} / 1 \times 10^7 = 1\text{m}$. On retrouve bien la valeur du mètre.

4. À partir de la mesure du méridien, calculer le rayon de la Terre.

Solution: $\ell = 2\pi R$ donc $R = \frac{\ell}{2\pi} = \frac{4,0 \times 10^4\text{km}}{2\pi} = 6,4 \times 10^3\text{km}$

Le rayon de la Terre est de 6400 km environ.

Pour aller plus loin

Quelques chiffres : la triangulation entre Dunkerque et Barcelone a été réalisée à l'aide de quatre-vingt-dix triangles mesurés entre 1792 et 1799. Durant cette aventure, cinq cent mille mesures d'angles ont été effectuées et l'estimation faite en 1980 de la distance entre Dunkerque et Barcelone (mesures effectuées par satellites) diffère de la valeur de Delambre et Méchain de dix mètres seulement, soit moins de 0,001% !